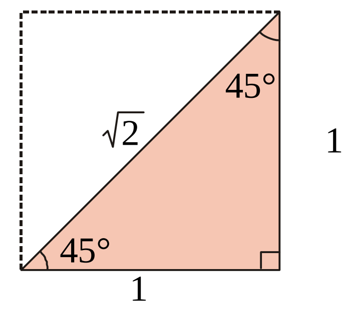
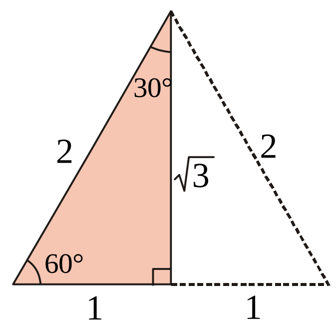
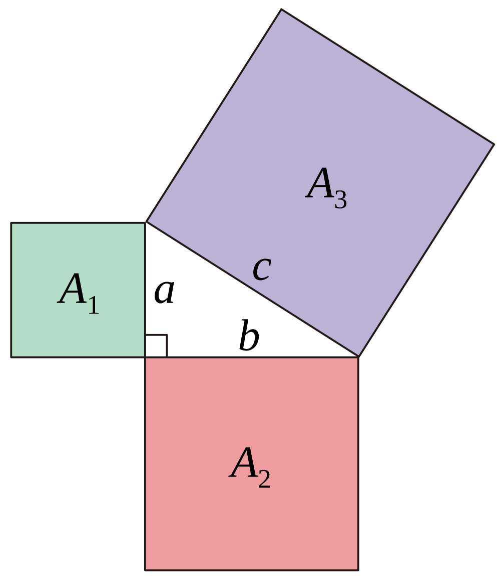
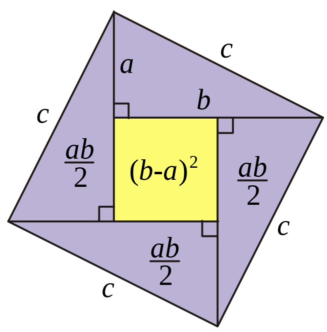
Lukion Calculus

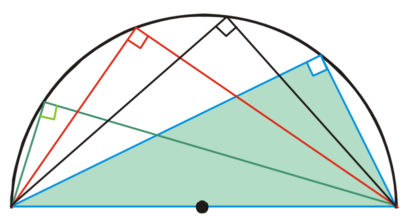
Täydentävä aineisto











$$A_1 + A_2 = A_3$$

SUORAKULMAINEN KOLMIO

Paavo Jäppinen
Alpo Kupiainen
Matti Räsänen

OTAVA

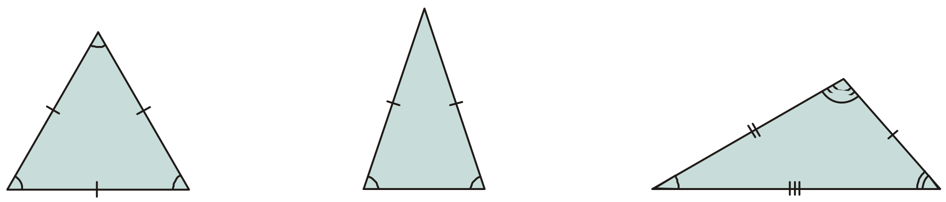
Suorakulmainen kolmio

Käsillä oleva Lukion Calculus -sarjan täydennysmateriaali kokoaa kaiken sen keskeisen aineiston, joka lukio-opinnoissa liittyy suorakulmaiseen kolmioon. Aihepiiri soveltuu hyvin myös omatoimiseen opiskeluun kurssin MAA3 yhteydessä tai koko oppimäärää kerrattaessa.

1 Kolmioiden luokittelu

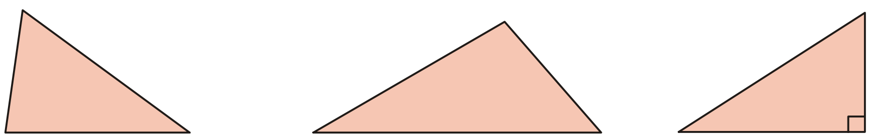
Kolmiot voidaan luokitella

- **sivujen mukaan**



tasasivuinen (kaikki sivut yhtä pitkiä) — tasakylkinen (kaksi yhtä pitkää sivua) — erisivuinen (kaikki sivut eri pituisia)

- **kulmien mukaan**

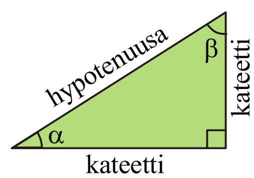


teräväkulmainen (kaikki kulmat teräviä) — tylppäkulmainen (yksi kulma tylppä) — suorakulmainen (yksi kulma suora)

Suorakulmaisen kolmion suoran kulman viereisen sivun nimi on *kateetti* ja vastaisen *hypotenuusa*.

Kolmiossa suurinta kulmaa vastaa pisin sivu, joten hypotenuusa on suorakulmaisen kolmion pisin sivu.

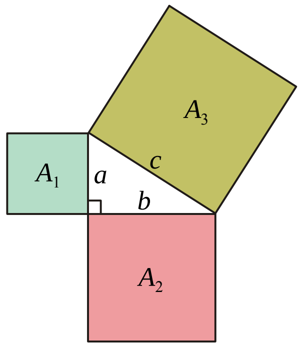
Kolmiossa kaikkien kulmien summa on 180°. Tämän nojalla suorakulmaisen kolmion terävien kulmien summa on 90°. Ne ovat siis toistensa *komplementtikulmia*.



2 Pythagoraan lause

Tunnetuin suorakulmaiseen kolmioon liittyvä lause on *Pythagoraan lause*. Pythagoras oli kuuluisa kreikkalainen matemaatikko ja filosofi, joka kuoli 99-vuotiaana vuonna 469 eaa.

Suorakulmaisen kolmion kateettien neliöiden summa on yhtä suuri kuin hypotenuusan neliö[1].

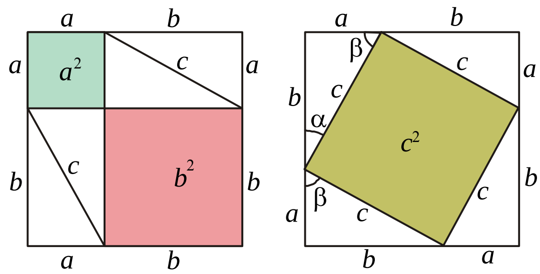


Oheisen kuvan mukaan $A_1 + A_2 = A_3$ eli $a^2 + b^2 = c^2$.

Pythagoraan lause tunnettiin jo muinaisessa Mesopotamiassa, ehkä jo faaraoiden ajan Egyptissäkin. Mutta Pythagoras, joka toi *todistuksen* matematiikkaan, lienee ensimmäisenä todistanut lauseen. Aikojen kuluessa näitä todistuksia on esitetty runsaasti erilaisina versioina. Seuraavassa on niistä kolme esimerkkiä.

Todistus 1

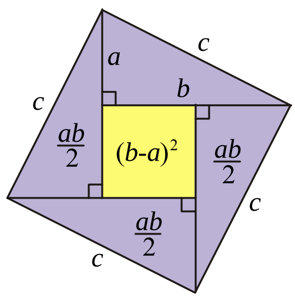
Oheisissa kuvissa on kaksi neliötä, joiden kummankin sivun pituus on $a + b$. Neliöt on jaettu osiin niin, että kummassakin neliössä on neljä yhtenevää suorakulmaista kolmiota, joiden kateetit ovat a ja b ja hypotenuusa c. Oikeanpuoleiseen kuvaan syntynyt nelikulmio on neliö, koska kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja jokainen kulma $= 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 90° = 90°$. Kun molemmista alkuperäisistä neliöistä vähennetään neljä samansuuruista kolmiota, saadaan yhtä suuret pinta-alat eli tulos $a^2 + b^2 = c^2$.



Todistus 2

Viereisessä kuvassa on neljä samanlaista suorakulmaista kolmiota sijoitettu neliön muotoon. Keskelle jäävän pienemmän neliön sivun pituus on kateettien erotus $b - a$ ja ala $(b-a)^2$. Kuvassa olevan c-sivuisen neliön ala voidaan nyt esittää seuraavasti:

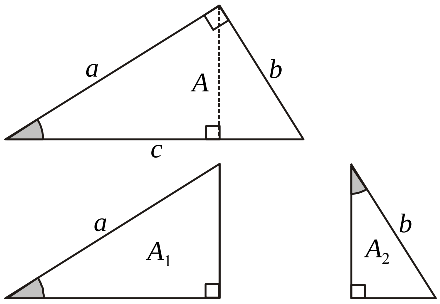
$$c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (b-a)^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2 = b^2 + a^2.$$



Todistus 3

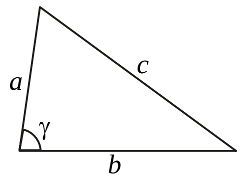
Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan vastainen korkeus jakaa kolmion kahteen osakolmioon, jotka ovat yhdenmuotoisia sekä keskenään että alkuperäisen kolmion kanssa yhtenevyys-

[1] Matematiikan kielessä jotkin lyhennetyt ilmaisut vakiintuvat. Tässä yhteydessä *neliö* tarkoittaa toista potenssia ja *kateetin neliö* kyseisen sivun pituuden toista potenssia.



lauseen *kk* nojalla. Koska yhdenmuotoisten kuvioiden alojen suhde on mittakaavan eli vastinjanojen suhteen neliö, saadaan oheisen kuvan merkinnöin $\frac{A_1}{A}=\left(\frac{a}{c}\right)^2=\frac{a^2}{c^2}$ ja $\frac{A_2}{A}=\left(\frac{b}{c}\right)^2=\frac{b^2}{c^2}$. Laskemalla yhtälöt yhteen saadaan $\frac{A_1+A_2}{A}=\frac{a^2+b^2}{c^2}$. Koska $A_1+A_2=A$, niin $1=\frac{a^2+b^2}{c^2}$, josta $a^2+b^2=c^2$.

Pythagoraan lauseen käänteislause

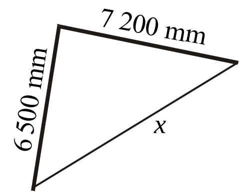


Mille tahansa kolmiolle pätee kosinilause $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$, jossa a ja b ovat kulman γ viereisiä sivuja ja c on kulman γ vastainen sivu. Jos kolmion sivut toteuttavat yhtälön $c^2=a^2+b^2$, Niin $0=-2ab\cos\gamma$, jolloin $\cos\gamma=0$ ja näin ollen $\gamma=90°$. Tällainen kolmio on siis suorakulmainen.

Jos kolmiossa kahden sivun neliöiden summa on kolmannen sivun neliö, niin kolmio on suorakulmainen.

Kun kolmion suorakulmaisuutta testataan yllä olevaa lausetta käyttäen, tulee "kolmanneksi sivuksi" eli mahdolliseksi hypotenuusaksi valita luonnollisesti kolmion pisin sivu.

Esimerkki 1



Suoran kulman konstruointi pituuden mittauksilla perustuu Pythagoraan lauseen käänteislauseeseen. Millä pituuden x arvolla varmistuu oheisessa tilanteessa rakennusten seinälinjojen kohtisuoruus?

Ratkaisu:

Seinälinjat ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa tarkalleen silloin, kun $x^2=6\,500^2+7\,200^2$.

Saadaan $x^2=94\,090\,000$, josta $x=9\,700$.

Vastaus: 9 700 mm

Esimerkki 2

Kolmion sivujen pituudet ovat **a)** 12, 35 ja 31, **b)** 12, 35 ja 37. Selvitä, onko kolmio suorakulmainen.

Ratkaisu

a) $12^2+31^2=1\,105$ ja $35^2=1\,225$. Koska $12^2+31^2\neq 35^2$, kolmio ei ole suorakulmainen.

Huomautus: Koska $35^2>12^2+31^2$, on pääteltävissä, että pisintä sivua vastaava kulma on tylppä, eli kolmio on tylppäkulmainen. Kosinilauseen avulla saadaan kulman likiarvoksi 99,3°.

b) $12^2 + 35^2 = 1\,369$ ja $37^2 = 1\,369$. Koska $12^2 + 35^2 = 37^2$, kolmio on suorakulmainen.

Vastaus: **a)** Ei ole. **b)** On.

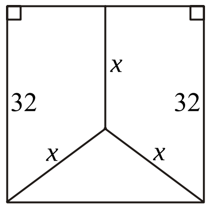
Tehtäviä

1. Kolmion sivujen pituudet ovat **a)** 5, 12 ja 15, **b)** 9, 40 ja 41 Selvitä, onko kolmio suorakulmainen.

2. Kolmion kahden sivun pituudet ovat 15 ja 17. Määritä kolmannen sivun pituus, kun kolmio on suorakulmainen.

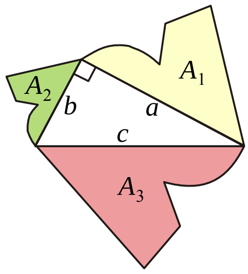
3. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on 24 cm pitempi kuin toinen kateetti. Toisen kateetin pituus on 72 cm. Kuinka pitkä on hypotenuusa?

4. Viereisessä kuvassa esitetyn neliön sivun pituus on 32. Kuinka pitkiä ovat kirjaimella x merkityt janat?



5. **a)** Osoita, että luvut $a = 2n+1$, $b = 2n^2 + 2n$ ja $c = 2n^2 + 2n + 1$ ovat Pythagoraan lukuja (eli toteuttavat Pythagoraan yhtälö), kun n on luonnollinen luku.
b) Määritä kaikki sellaiset Pythagoraan luvut, jotka ovat peräkkäisiä luonnollisia lukuja.

6. Viereisessä kuvassa olevien yhdenmuotoisten alueiden pinta-alat ovat A_1, A_2 ja A_3. Osoita, että $A_1 + A_2 = A_3$.



***7.** Pythagoralaisten mukaan koko maailmankaikkeus rakentui luonnollisten lukujen mallin mukaan. Tämän ajattelutavan tuhosi seuraava huomio: ei ole kahta sellaista luonnollista lukua, joista toisen neliö olisi kaksi kertaa toisen neliö. Osoita tämä todeksi epäsuorasti lähtemällä yhtälöstä $n^2 = 2m^2$, jossa n ja m ovat luonnollisia lukuja.

3 Yhdenmuotoiset suorakulmaiset kolmiot

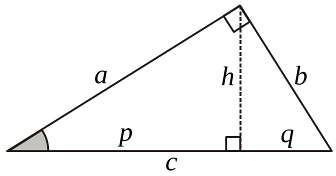
Kolmioiden yhdenmuotoisuuslauseista *sss*, *sks*, *kk* ja *ssk* esiintyy kaikkein useimmin lause *kk*:

Jos kolmion kaksi kulmaa ovat yhtä suuret kuin vastinkulmat toisessa kolmiossa, kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

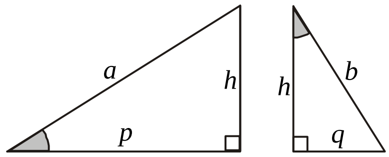
Kun on todistettava kaksi suorakulmaista kolmiota yhdenmuotoisiksi, riittää osoittaa, että niissä kummassakin on samansuuruinen terävä kulma. Siitä seuraa välittömästi, että toisetkin terävät kulmat ja samalla kolmioiden kaikki vastinkulmat ovat yhtä suuria.

Edellä todettiin Pythagoraan lauseen yhteydessä, että suorakulmaisen kolmion hypotenuusan vastainen korkeus jakaa kolmion kahteen osakolmioon, jotka ovat yhdenmuotoisia sekä keskenään että alkuperäisen kolmion kanssa. Koska yhdenmuotoisten kuvioiden vastinjanojen suhteet ovat yhtä suuret, saadaan seuraava tulos:

$\frac{p}{h}=\frac{h}{q}$	Hypotenuusan vastainen korkeus on kateettien hypotenuusalla olevien projektioiden *keskiverto**.

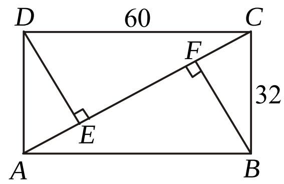


$\frac{c}{a}=\frac{a}{p}$ $\frac{c}{b}=\frac{b}{q}$	Kateetti on hypotenuusan ja hypotenuusalla olevan projektionsa keskiverto.



Seuraus:
Jälkimmäisestä lauseesta saadaan yhtälöt $a^2 = cp$ ja $b^2 = cq$, joista yhteen laskemalla seuraa tulos $a^2 + b^2 = cp + cq = c(p+q) = c^2$. Kysymyksessä on jälleen erilainen tapa todistaa Pythagoraan lause.

Esimerkki
Laske oheisen suorakulmion *ABCD* lävistäjän osana olevan janan *EF* pituus.



Ratkaisu:
Pythagoraan lauseen mukaan $AC = \sqrt{60^2 + 32^2} = \sqrt{4\,624} = 68$. Merkitään $x = CF$. Koska kateetti on hypotenuusan ja sillä olevan projektionsa keskiverto, pätee $\frac{68}{32} = \frac{32}{x}$, josta $x = \frac{32^2}{68} = \frac{1\,024}{68} = \frac{256}{17}$. Koska $AE = CF$, niin $EF = 68 - 2\cdot\frac{256}{17} = 68 - 30\frac{2}{17} = 37\frac{15}{17}$.

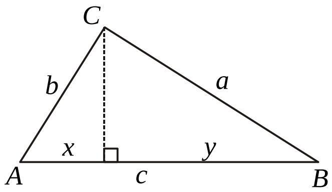
Vastaus: $EF = 37\frac{15}{17}$

***) Verrantoon liittyvät nimitykset**

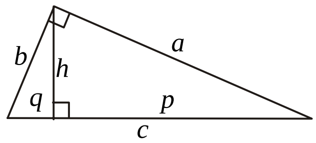
Kun kaksi suhdetta merkitään yhtä suuriksi, saadaan verranto. Verrannossa $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ suureet *a*, *b*, *c* ja *d* ovat verrannon *jäseniä* niin, että *a* on ensimmäinen, *b* toinen, *c* kolmas ja *d* neljäs jäsen. Suureet *a* ja *d* ovat *äärimmäisiä* ja *b* ja *c* *keskimmäisiä* jäseniä.

Edellä saadussa suorakulmaisen kolmion verrannossa $\frac{p}{h} = \frac{h}{q}$ keskimmäiset jäsenet ovat samat. Tällöin sanotaan, että *h* on äärimmäisten jäsenten *p* ja *q* keskiverto. Koska verrannossa keskimmäisten jäsenten tulo on yhtä suuri kuin äärimmäisten jäsenten tulo, saadaan yhtälö $h^2 = pq$, josta edelleen $h = \sqrt{pq}$. Saatua neliöjuurilauseketta kutsutaan *p*:n ja *q*:n *geometriseksi keskiarvoksi*.

Tehtäviä



8. Tiedetään, että kolmiossa *ABC* on $a^2 = yc$ ja $b^2 = xc$. Osoita, että kolmio *ABC* on suorakulmainen.

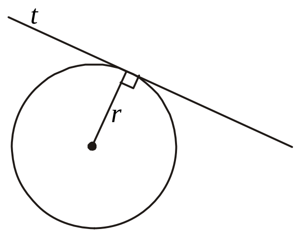


9. Oheiseen kolmiokuvioon on merkitty kirjaimin kuuden eri janan pituudet. Määritä tuntemattomat pituudet seuraavissa tapauksissa.
a) $b = 6$ ja $c = 10$
b) $a = 6$ ja $b = 2$
c) $a = 13$ ja $h = 5$

10. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan vastainen korkeus jakaa hypotenuusan osiin, joiden pituudet ovat 14,8 cm ja 33,3 cm. Laske kolmion pinta-ala.

4 Ympyrään liittyvä suora kulma

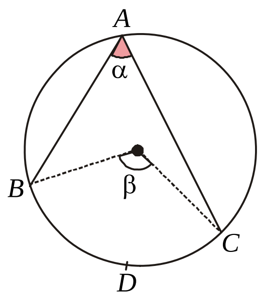
Tangentti on suora, jolla on ympyrän kanssa tarkalleen yksi yhteinen piste, *sivuamispiste*. Voitaisiin myös määritellä, että



- tangentti on suora, joka on kohtisuorassa sädettä vastaan kehällä olevassa päätepisteessä, tai
- tangentti on suora, joka on säteen etäisyydellä keskipisteestä.

Kun näistä määritelmästä valitaan yksi, toisia voidaan pitää tangentin ominaisuuksina.

Kehäkulma on kulma, jonka kärki on ympyrän kehällä ja kyljet leikkaavat ympyrää. Kehäkulman toisena kylkenä voi olla myös ympyrän tangentti. Viereisessä kuvassa kulma α on

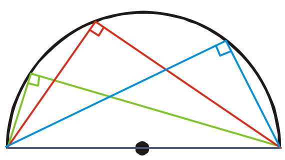


- *kaaren BAC sisältämä kehäkulma*,
- *kaarta BDC vastaava kehäkulma*.

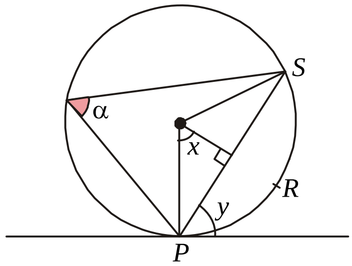
Kulma β on *kehäkulmaa α vastaava keskuskulma*.

Tiedetään, että kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta. Siitä seuraa erityisesti, että jos keskuskulma on 180°, kehäkulma on silloin 90°. Tässä tilanteessa kehäkulma on puoliympyrän sisältämä ja on voimassa lause:

Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora.



Esimerkki 1
Oheisen kuvan ympyrälle on piirretty tangentti pisteeseen P. Määritä kaaren PRS asteluku sekä kulmien x ja y suuruudet, kun kehäkulma $\alpha = 58°$.



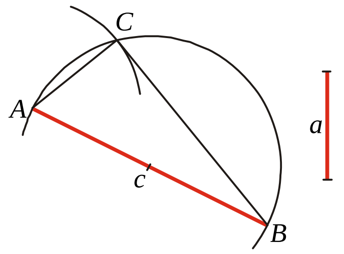
Ratkaisu:
Kulma y on myös kehäkulma, ja koska sitä ja kulmaa α vastaa sama kaari PRS, niin $y = \alpha$. Kulmaa α vastaava keskuskulma on $2x$, ja koska α on puolet siitä, niin $\alpha = x$.

Keskuskulmalla ja sitä vastaavalla kaarella on sama asteluku, joten kaaren PRS asteluku on $2x = 2 \cdot 58° = 116°$.

Vastaus: $x = y = 58°$, kaaren PRS asteluku on 116°

Esimerkki 2
Annettu jana c hypotenuusana on sitä toiseen paikkaan siirtämättä piirrettävä suorakulmainen kolmio, jonka toinen kateetti on tunnetun janan a suuruinen.

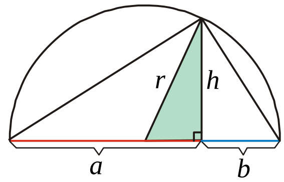
Ratkaisu:
Olkoot janan c päätepisteet A ja B. Piirretään jana AB halkaisijana ympyräviiva. Tämän jälkeen piirretään piste A keskipisteenä ja jana a säteenä ympyräviiva. Se leikatkoon ensin piirrettyä ympyrää pisteessä C. Yhdistetään piste C pisteisiin A ja B. Kolmio ABC on vaadittu kolmio. Se on suorakulmainen, sillä sen kulma C on puoliympyrän sisältämä kehäkulma.



Tehtävä voidaan ratkaista, mikäli jana a on lyhyempi kuin jana c. Kuinka monta eri ratkaisua on mahdollista saada?

Esimerkki 3
Osoita geometrisesti, että kahden positiivisen luvun a ja b geometrinen keskiarvo on enintään yhtä suuri kuin samojen lukujen aritmeettinen keskiarvo eli $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

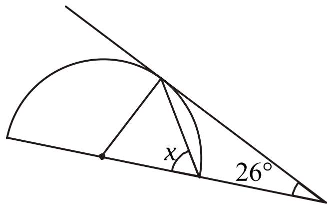
Ratkaisu:
Olkoot a ja b kahden janan pituudet. Merkitään samoilla kirjaimilla myös itse janoja. Erotetaan joltakin suoralta peräkkäin janat a ja b ja piirretään puoliympyrä, jonka halkaisijan pituus on $a + b$. Puoliympyrän säde on silloin $\dfrac{a+b}{2}$. Piirretään puoliympyrään suorakulmainen kolmio, jonka kateettien projektiot ovat a ja b. Silloin kolmion korkeus h on näiden projektioiden keskiverto eli janojen a ja b geometrinen keskiarvo $\sqrt{ab}$.



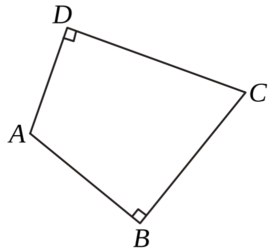
Koska suorakulmaisen kolmion kateetti on aina lyhyempi kuin hypotenuusa, on kuvaan korostetussa osakolmiossa $h < r$ eli $\sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$. Siinä erikoistapauksessa, että $a = b$, on $h = r$, jolloin geometrinen ja aritmeettinen keskiarvo ovat yhtä suuria.

Tehtäviä

11. Viereisessä kuvassa on puoliympyrälle piirretty tangentti. Kuinka suuri on kulma x?

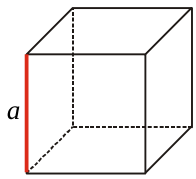


12. Oheisen nelikulmion *ABCD* ympäri voidaan piirtää ympyrä. Mieti tapoja, kuinka löydetään tämän ympyrän keskipiste.

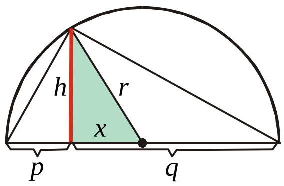


13. On annettu janat a ja b. Merkitään samoilla kirjaimilla myös janojen pituuksia. On piirrettävä jana, joka on janojen a ja b geometrinen keskiarvo $\sqrt{ab}$.

14. Tunnetaan kuutio, jonka särmä on a. Miten löydetään geometrisesti sellaisen neliön sivu s, jonka pinta-ala on yhtä suuri kuin kuution vaipan ala? (Ohje: $s = \sqrt{6a^2} = \sqrt{3a \cdot 2a}$)

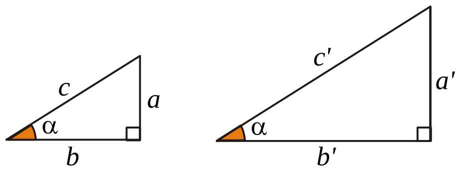


15. Suorakulmaisen kolmion korkeutta koskeva yhtälö $\frac{p}{h} = \frac{h}{q}$ (ks. s 5) voidaan esittää muodossa $h^2 = pq$. Osoita tämä yhtälö oikeaksi soveltamalla aluksi Pythagoraan lausetta oheisessa kuvassa korostettuun osakolmioon.



5 Suorakulmaisen kolmion trigonometriaa

Kolmioiden yhdenmuotoisuuslauseesta *kk* seuraa, että kaikki sellaiset suorakulmaiset kolmiot ovat yhdenmuotoisia, joissa on samansuuruinen terävä kulma. Niissä kolmioissa **sivujen suhteet ovat yhtä suuret**.



$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$ eli yhtäpitävästi $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$

Vastaavasti $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$ ja $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$.

Sivujen suhde riippuu vain terävän kulman suuruudesta eikä lainkaan kolmion koosta. Näitä sivujen suhteita sanotaan terävän kulman *trigonometrisiksi funktioiksi*, ja ne ovat nimeltään *sini*, *kosini*, *tangentti* ja *kotangentti*. Funktioiden määritelmät ovat seuraavat:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a}$$

Määritelmistä voidaan johtaa **trigonometrian peruskaavat**. Tässä yhteydessä käytetään vakiintuneita merkitsemistapoja $(\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha$ ja $(\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha$.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \tan\alpha$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

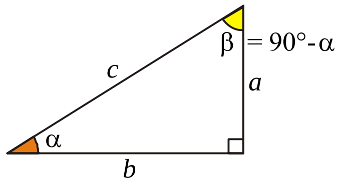
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

Kun suorakulmaisen kolmion toinen terävä kulma on α, toinen on sen komplementtikulma $\beta = 90° - \alpha$. Näiden kulmien välille saadaan seuraavat trigonometriset yhteydet:

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \cos\alpha \qquad \cos\beta = \frac{a}{c} = \sin\alpha$$

$$\tan\beta = \frac{b}{a} = \cot\alpha \qquad \cot\beta = \frac{a}{b} = \tan\alpha$$



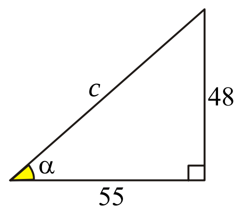
Ensimmäisen yhtälön mukaan kulman **kosini** on yhtä suuri kuin **ko**mplementtikulman **sini**. Kosinin ja kotangentin nimissä oleva etutavu *ko* onkin tullut komplementtikulma-sanan alusta.

Esimerkki 1
Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 48 ja 55. Määritä kolmion pienimmän kulman trigonometristen funktioiden tarkat arvot ja pienin kulma asteen kymmenesosan tarkkuudella.

Ratkaisu:
Pienin kulma on lyhimmän sivun vastainen kulma α. Pythagoraan lauseen nojalla $c = \sqrt{48^2 + 55^2} = \sqrt{5\,329} = 73$. Saadaan tulokset

$$\sin\alpha = \frac{48}{73},\ \cos\alpha = \frac{55}{73},\ \tan\alpha = \frac{48}{55} \text{ ja } \cot\alpha = \frac{55}{48}.$$

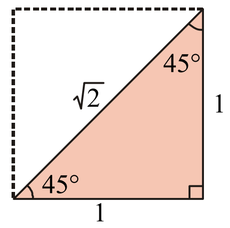
Laskimella saadaan $\alpha \approx 41{,}1°$.



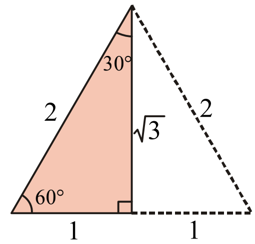
Sivun 8 määritelmissä cotα on vain tanα:n käänteisluku. Joskus, vaikka vieläkin harvemmin, esiintyvät myös sinin ja kosinin käänteisluvut "kosekantti" ja "sekantti". Ne määritellään yhtälöin $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}$ ja $\sec\alpha = \frac{c}{b}$.

Laskimissa esiintyvät nykyisin yleensä vain sini, kosini ja tangentti. Laskimia edeltävänä aikana trigonometristen funktioiden arvot saatiin tätä tarkoitusta varten laadituista taulukkokirjoista esimerkiksi viiden desimaalin tarkkuudella.

Muistikolmiot



Neliön lävistäjä jakaa neliön kahteen tasakylkiseen suorakulmaiseen kolmioon, joissa kantakulmien suuruus on 45°. Jos neliön sivun pituus on 1, lävistäjän pituus on $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. Kolmion sivujen suhteet ovat siis $\underline{\underline{1:1:\sqrt{2}}}$.

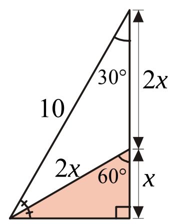


Tasasivuisen kolmion korkeus jakaa kolmion kahteen suorakulmaiseen kolmioon, joiden terävien kulmien asteluvut ovat 30° ja 60°. Kun lyhyemmän kateetin pituus on 1, hypotenuusan pituus on 2 ja toisen kateetin pituus $\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$. Sivujen suhteet ovat näin ollen $\underline{\underline{1:\sqrt{3}:2}}$.

Näitä kolmioiden erikoistapauksia kutsutaan *muistikolmioiksi*. Monissa sovelluksissa on eduksi muistaa niiden sivujen suhteet $1 : 1 : \sqrt{2}$ ja $1 : \sqrt{3} : 2$. Käänteisesti voidaan päätellä kolmio muistikolmioksi, mikäli sillä on mainitut sivujen suhteet.

Esimerkki 2
Muistikolmioon, jonka hypotenuusan pituus on 10, piirretään suuremman terävän kulman puolittaja. Kuinka pitkiin osiin se jakaa leikkaamansa kateetin?

Ratkaisu:



Lyhyemmän kateetin pituus on 5 ja pitemmän $5\sqrt{3}$. Kulman puolittaja jakaa kolmion osakolmioiksi, joista toinen on muistikolmio ja toinen tasakylkinen kolmio. Jos pienemmän muistikolmion lyhyempi kateetti on x, hypotenuusa on $2x$, jolloin tasakylkisen kolmion toinen kylki on myös $2x$. Saadaan yhtälö $x+2x=5\sqrt{3}$, josta $x=\frac{5\sqrt{3}}{3}$. Tällöin $2x=\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

Vastaus: $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ja $\frac{10\sqrt{3}}{3}$

Tehtäviä.

16. Määritä muistikolmioissa esiintyvien terävien kulmien trigonometristen funktioiden tarkat arvot.

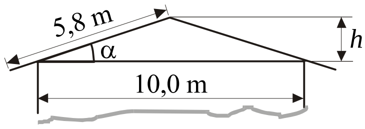
17. Kuinka pitkä on tasakylkisen suorakulmaisen kolmion kateetti, kun hypotenuusan pituus on 16?

18. Mäen jyrkkyys ilmaistaan usein prosentuaalisesti nousun ja vaakasuunnassa edetyn matkan suhteena. Määritä tien kaltevuus asteina, kun jyrkkyydeksi on liikennemerkillä ilmoitettu 13 %.

19. Suorakulmaisen kolmion terävän kulman sini on 0,618034. Määritä kyseisen kulman kosinin ja tangentin arvot viidellä desimaalilla.

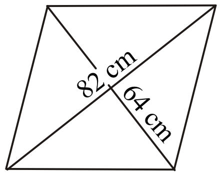
20. Minkä leveyspiirin pituus on 23 000 km? Maapallon säde on 6 370 km.

21. Laske ohessa kuvatun rakennuksen katon kaltevuus α ja korkeus *h*. Räystään pituus on 60 cm.

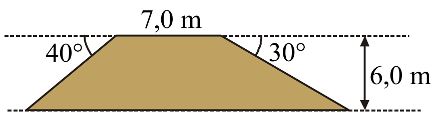


22. Kaksi korkeuskäyrää sijaitsee kartalla 4 mm:n päässä toisistaan. Maaston kaltevuus kyseisessä kohdassa on 18,4°. Kuinka suuri on käyrien välinen korkeusero, kun kartan mittakaava on 1: 30 000?

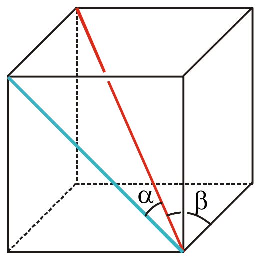
23. Neljäkkään lävistäjien pituudet ovat 64 cm ja 82 cm. Määritä neljäkkään kulmat ja sivujen pituudet.



24. Järven rantaan rakennetaan puoli kilometriä pitkä patovalli, jonka poikkileikkaus on oheisen kuvan mukainen. Kuinka paljon maa-ainesta rakentamisen tarvitaan?



25. Laske oheisessa kuutiossa esiintyvien kulmien α ja β suuruudet asteen kymmenesosan tarkkuudella.



Vastauksia

1. **a)** Ei ole. **b)** On.

2. 8 tai $\sqrt{514} \approx 22{,}7$

3. 120 cm

4. 20 pituusyksikköä

5. **a)** $a^2 + b^2 = (2n+1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = 4n^2 + 4n + 1 + 4n^4 + 8n^3 + 4n^2$

$$= 4n^4 + 4n^2 + 1 + 2 \cdot 4n^3 + 2 \cdot 2n^2 + 2 \cdot 2n = (2n^2 + 2n + 1)^2 = c^2$$

b) $n^2 + (n+1)^2 = (n+2)^2 \Leftrightarrow n^2 + n^2 + 2n + 1 = n^2 + 4n + 4 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow n = -1 \text{ tai } n = 3$$

Ainoat peräkkäiset Pythagoraan luvut ovat 3, 4 ja 5.

6. $\frac{A_1}{A_3} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2}$ ja $\frac{A_2}{A_3} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2}$. Laskemalla yhtälöt yhteen saadaan

$\frac{A_1}{A_3} + \frac{A_2}{A_3} = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$, jolloin $A_1 + A_2 = A_3$.

***7.** Olkoon $n^2 = 2m^2$, jossa $n, m \in \mathbf{N}$. Voidaan rajoituksetta olettaa, että n ja m ovat keskenään jaottomia, koska yhteiset tekijät voitaisiin jakaa yhtälöstä pois. Jos n on pariton, myös n^2 on pariton, mutta tämä on mahdotonta, koska $2m^2$ on parillinen. Jos taas n on parillinen esimerkiksi $n = 2k$, niin $4k^2 = 2m^2$ eli $2k^2 = m^2$, jolloin m olisi parillinen. Näin ei voi olla, koska n ja m ovat keskenään jaottomia. Johtopäätös on, että yhtälöä $n^2 = 2m^2$ eivät toteuta mitkään luonnolliset luvut.

8. $a^2 + b^2 = yc + xc = c(y + x) = c \cdot c = c^2$ □

9. **a)** $a = 8$, $p = 3\frac{3}{5}$, $q = 6\frac{2}{5}$, $h = 4\frac{4}{5}$ **b)** $c = 2\sqrt{10}$, $p = \frac{2}{\sqrt{10}}$, $q = \frac{18}{\sqrt{10}}$, $h = \frac{6}{\sqrt{10}}$

c) $b = 5\frac{5}{12}$, $p = 2\frac{1}{12}$, $q = 12$, $c = 14\frac{1}{12}$

10. 534 cm^2

11. $x = 58°$

12. Lyhin tapa: janan AC keskipiste

15. $h^2 = r^2 - x^2 = (r - x)(r + x) = pq$

17. $8\sqrt{2}$

18. 7,4°

19. $\cos\alpha \approx \tan\alpha \approx 0{,}78615$

20. 55°

21. $\alpha \approx 15{,}9°$, $h \approx 1{,}4$ m

22. 40 m

23. Kaikki sivut 52 cm, kulmat 76° ja 104°

24. noin 47 300 m^3

25. $\alpha \approx 35{,}3°$ ja $\beta \approx 54{,}7°$