

Calculus^{Lukion}

MAA KERTAUSKIRJA

Paavo Jäppinen

Alpo Kupiainen

Matti Räsänen

Otava

MITEN MÄÄRITÄN ASYMPTOOTIT?

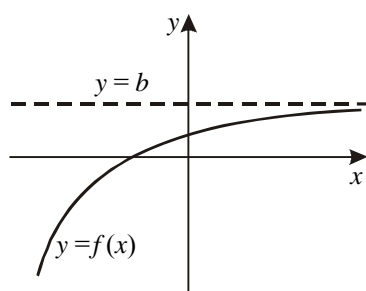
Asymptootti

Asymptootti on suora tai muu käyrä, jota funktion kuvaaja $y = f(x)$ rajatta lähestyy, kun muuttujan x arvot lähestyvät tiettyä lukua tai ääretöntä.

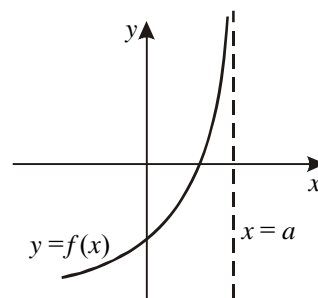
Rajoitetaan aluksi niihin tapauksiin, joissa asymptootti on suora. Se voi tällöin olla *vaakasuora* eli x -akselin suuntainen, *pystysuora* eli y -akselin suuntainen tai *vino* suora.

Esimerkkejä asymptoottiaan lähestyvistä käyristä. Asymptootti on piirretty katkoviivalla.

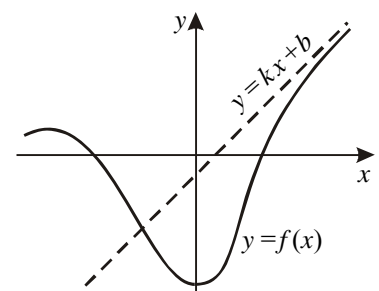
Esimerkki 1.



Esimerkki 2.



Esimerkki 3.



Esimerkki 1. Asymptoottina on vaakasuora suora $y = b$.
Kuvan esittämässä tilanteessa $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ eli $\lim_{x \rightarrow \infty} (b - f(x)) = 0$.

Esimerkki 2. Asymptoottina on pystysuora suora $x = a$.
Kuvan esittämässä tilanteessa $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$.

Esimerkki 3. Asymptoottina on vino suora $y = kx + b$.
Kuvan esittämässä tilanteessa $\lim_{x \rightarrow \infty} (kx + b - f(x)) = 0$.

1 Murtofunktion kuvaajan asymptootit

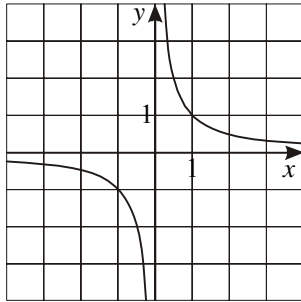
Murtofunktioksi sanotaan rationaalifunktiota, joka voidaan esittää kahden polynomin osamääränä eli muodossa $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. Oletetaan, että lauseke on supistettu yksinker-

taisimpaan muotoonsa ja siinä nimittäjän asteluku on vähintään yksi. Murtofunktiot ovat siis rationaalifunktioita, joiden lausekkeet eivät ole polynomeja. Ero on tässä asiayhteydessä tarpeen tehdä siksi, että *polynomifunktioiden kuvaajilla ei ole asymptootteja*.

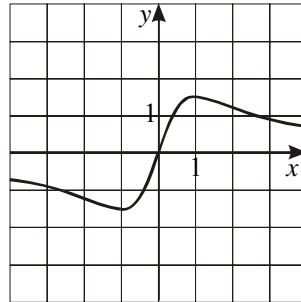
Jokaisen murtofunktion kuvaajalla on ainakin yksi asymptootti. Asymptootit kannattaa usein määrittää siksi, että itse käyrä voidaan piirtää helposti niiden tuella. Asymptootit muodostavat tietynlaiset kehykset varsinaiselle käyrälle. Seuraavissa esimerkeissä esiintyvät erilaiset suoraviivaiset asymptoottityypit. Koordinaattiakselista eroava asymptootti on piirretty katkoviivalla.

Esimerkki 4

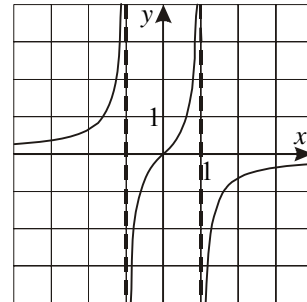
a) $f(x) = \frac{1}{x}$



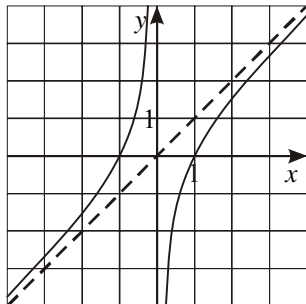
b) $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$



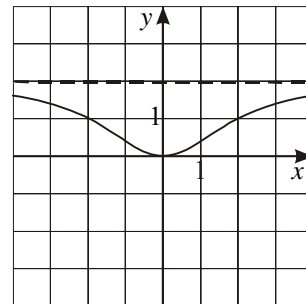
c) $f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$



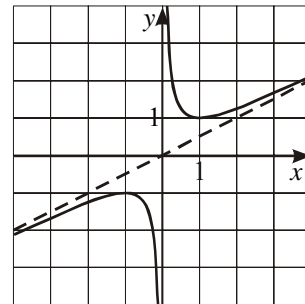
d) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$



e) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 4}$



f) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}$



Esimerkkien perusteella voidaan tehdä alustavia johtopäätöksiä asymptoteista. Ne määräytyvät

- nimittäjän nollakohtien sekä
- osoittajan ja nimittäjän astelukujen perusteella

seuraavasti:

Asymptootina on

1. pystysuora suora nimittäjän nollakohdissa (a, c, d ja f)
2. x -akseli, jos osoittajan asteluku on pienempi kuin nimittäjän (a, b ja c)
3. x -akselin suuntainen suora, jos osoittajan asteluku on sama kuin nimittäjän (e)
4. vino suora, jos osoittajan asteluku on yhtä yksikköä suurempi kuin nimittäjän (d ja f).

Perustellaan esimerkissä 4 esiintyvät asymptootit.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ ja } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Pystysuora asymptootti on y -akseli eli suora $x = 0$.

Vaakasuuora asymptootti on x -akseli eli suora $y = 0$.

- b) $x^2 + 1 \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3/x}{1 + 1/x^2} = \frac{0}{1} = 0$$
Pystysuoria asymptootteja ei ole.
Vaakasuora asymptootti on x -akseli eli suora $y = 0$.
- c) Toispuoliset raja-arvot kohdissa $x = -1$ ja $x = 1$ antavat + tai - äärettömän.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1/x}{1/x - 1} = \frac{0}{-1} = 0$$
Pystysuorat asymptootit ovat $x = \pm 1$.
Vaakasuora asymptootti on x -akseli eli suora $y = 0$.
- d)
$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \left(x - \frac{1}{x} \right) = \mp\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x - \frac{x^2 - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$
Pystysuora asymptootti on y -akseli eli suora $x = 0$.
Vino asymptootti on $y = x$.
- e) $x^2 + 4 \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{1 + 4/x^2} = 2$$
Pystysuoria asymptootteja ei ole.
Vaakasuora asymptootti on $y = 2$.
- f)
$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x^2 + 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x} \right) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2 + 1}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{2x} \right) = 0$$
Pystysuora asymptootti on y -akseli eli suora $x = 0$.
Vino asymptootti on $y = \frac{x}{2} = \frac{1}{2}x$.

Murtofunktion kuvaajan asymptootteista vinot asymptootit määritetään käytännössä niin, että murtolauseke saatetaan muotoon $\frac{p(x)}{q(x)} = r(x) + \frac{s(x)}{q(x)}$, jossa $s(x)$:n asteluku on pienempi kuin $q(x)$:n asteluku. Esimerkiksi $\frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x}$ tai $\frac{x^2 + 1}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}$. Usein tähän tarvitaan kuitenkin jakokulmassa jakamista. Siihen liittyy seuraava esimerkki.

Esimerkki 5

Määritä käyrän $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 1}$ vino asymptootti.

Ratkaisu:

$$x - 1 \overline{\begin{array}{r} x - 2 \\ x^2 - 3x + 4 \\ \mp x^2 \pm x \\ \hline -2x + 4 \\ \pm 2x \mp 2 \\ \hline +2 \end{array}}$$

Vastaus: $y = x - 2$

Vaillinaiseksi osamääräksi saatiin $x - 2$ ja jakojäännökseksi $+2$, joten $\frac{x^2 - 3x + 4}{x - 1} = x - 2 + \frac{2}{x - 1}$. Tästä nähdään, että kun $x \rightarrow \pm\infty$, lausekkeen arvot lähestyvät suoran $y = x - 2$ vastaavia arvoja, sillä $\frac{2}{x - 1} \rightarrow 0$. Vino asymptootti on siis $y = x - 2$.

2 Eräiden tunnettujen käyrien asymptootit

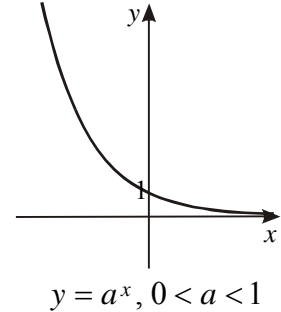
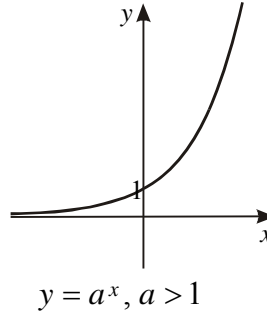
Eksponenttifunktion kuvaaja

Eksponenttifunktion $f(x) = a^x$ kuvaajan asymptoottina on x -akseli, sillä

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \text{ kun } a > 1,$$

ja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0, \text{ kun } 0 < a < 1.$$



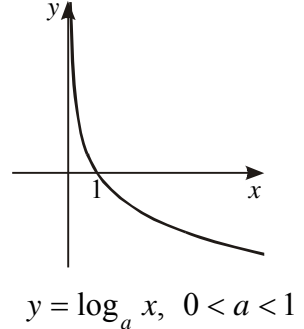
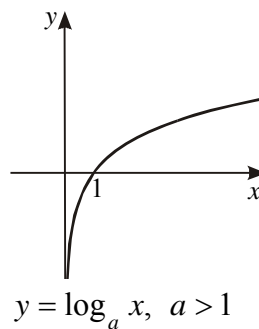
Logaritmifunktion kuvaaja

Logaritmifunktion $f(x) = \log_a x$ kuvaajan asymptoottina on y -akseli, sillä

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty, \text{ kun } a > 1,$$

ja

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = \infty, \text{ kun } 0 < a < 1.$$



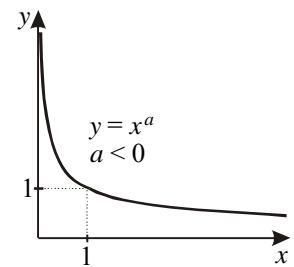
Potenssifunktion kuvaaja

Potenssifunktio määritellään yhtälöllä $f(x) = x^a$, jossa $x > 0$ ja $a \in \mathbf{R}$. Kun $a < 0$, käyrällä $y = x^a$ on asymptoottina sekä x -akseli että y -akseli.

Potenssifunktion määrittelyjoukkoa voidaan laajentaa.

Jos $n \in \mathbf{Z}_+$ (esim. $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$), asymptootteja ei ole.

Jos taas $n \in \mathbf{Z}_-$ (esim. $f(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$, $x \neq 0$), asymptootteina ovat koordinaattiakselit.



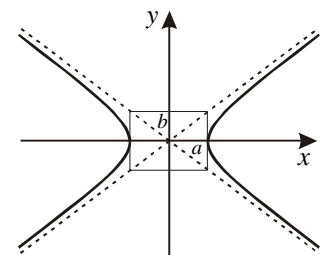
Hyperbeli

Kun hyperbelin keskipisteenä on origo ja huiput ovat x -

akselilla, yhtälö on $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Asymptootteina ovat suorat $y = \pm \frac{b}{a}x$. Nämä ovat myös

liittohyperbelin $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ asymptootit.



3 Käyräviivaiset asymptootit

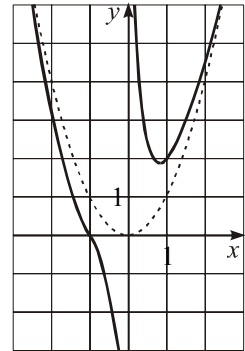
Jos murtofunktion lausekkeessa $\frac{p(x)}{q(x)}$ osoittajan $p(x)$ asteluku on vähintään kahta suurempi kuin nimittäjän $q(x)$, funktion kuvaajalla $y = \frac{p(x)}{q(x)}$ on käyräviivainen asymptootti. Näiden tarkastelu ei kuulu keskeiseen oppiaineeseen, joten havainnollistetaan tätä aihetta vain esimerkillä.

Esimerkki 6

Määritä funktion $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}$ kuvaajan käyräviivainen asymptootti ja piirrä käyrä asymptootteineen.

Ratkaisu:

Asymptootti saadaan selville, kun lauseke kirjoitetaan jakolaskulla saatuun muotoon $x^2 + \frac{1}{x}$. Kun nyt $x \rightarrow \pm\infty$, niin $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, joten kuvaaja lähestyy rajatta paraabelia $y = x^2$. Termin $\frac{1}{x}$ merkistä voidaan piirtämisen tueksi päätellä, millä puolella asymptoottiaan käyrä on. Kun esimerkiksi $x = -2$, on $\frac{1}{x} < 0$, joten käyrän piste on paraabelin pisteen alapuolella. Ohessa on funktion kuvaaja.



Vastaus: $y = x^2$

Tehtäviä

Määritä tehtävissä 1 ja 2 käyrien asymptootit ja piirrä niiden tuella käyrät.

1. a) $y = \frac{1}{x^2}$ b) $y = \frac{2x}{x+1}$ c) $y = \frac{3}{x^2+1}$

2. a) $y = \frac{-x}{x+1}$ b) $y = \frac{x^2-1}{x}$ c) $y = \frac{x^2}{1-x^2}$

Määritä asymptootit tehtävissä 3–7. Piirrä tarkistuksen vuoksi graafisella laskimella kuvaajat asymptootteineen.

3. a) $y = \frac{1-2x^2}{1-x^2}$ b) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ c) $y = \frac{1-2x^2}{x^2}$

4. a) $y = \frac{4}{x+6} + x - 4$ b) $y = \frac{2x^3+1}{x^2}$ c) $y = \frac{x^3+5x^2-4}{2x^2}$

5. a) $y = \frac{x^2}{2x+2}$ b) $y = \frac{x^2}{1-x}$ c) $y = \frac{x^2+2x-2}{2x-2}$

6. a) $y = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 2x}$ b) $y = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$ c) $y = \frac{x^2 - 6}{x - 3}$
7. a) $y = \pi^x$ b) $y = 2^{-x}$ c) $y = x^{-2}$
8. Määritä annetun käyrän asymptootit ja piirrä graafisen laskimen avulla käyrä asymptootteineen. a) $y = \frac{x^4 + 1}{2x^2}$ b) $y = \frac{x^4 + 1}{x}$ c) $y = \frac{x^4 - 1}{x}$
9. Määritä annetun hyperbelin asymptootit.
a) $x^2 - y^2 = 1$ b) $\frac{x^2}{2} - 4y^2 = 1$ c) $2x^2 - 4y^2 = 8$
10. Osoita y-koordinaattien erotusta tarkastelemalla, että käyrä $y = \ln(1 + e^x)$ lähenee rajattomasti suoraa $y = x$, kun $x \rightarrow \infty$. (yo-teht. S91/8)
11. Käyrällä $y = x^3(x^2 - 1)^{-1}$ on kolme suoraviivaista asymptoottia. Määritä ne ja piirrä käyrä asymptootteineen. (yo-teht. S96/7)
12. Käyrän $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ mielivaltaiseen pisteeseen $P(a, b)$ asetettu tangentti ja käyrän asymptootit rajoittavat kolmion. Osoita, että kolmion ala ei riipu sivuamispisteestä P . Piirrä kuvio. (yo-teht. K98/9)

Vastauksia

1. a) $x = 0, y = 0$ b) $x = -1, y = 2$ c) $y = 0$
2. a) $x = -1, y = -1$ b) $x = 0, y = x$ c) $x = \pm 1, y = -1$
3. a) $x = \pm 1, y = 2$ b) $y = 1$ c) $x = 0, y = -2$
4. a) $x = -6, y = x - 4$ b) $x = 0, y = 2x$ c) $x = 0, y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$
5. a) $x = -1, y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ b) $x = 1, y = -x - 1$ c) $x = 1, y = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$
6. a) $x = 0, x = -2, y = 1$ b) $x = 2, y = x + 2$ c) $x = 3, y = x + 3$
7. a) $y = 0$ b) $y = 0$ c) $x = 0, y = 0$
8. a) $x = 0, y = \frac{1}{2}x^2$ b) $x = 0, y = x^3$ c) $x = 0, y = x^3$
9. a) $y = \pm x$ b) $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}x$ c) $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$
10. Vihje: Merkitse aluksi $x = \ln e^x$.
11. $x = \pm 1, y = x$ Määritä piirtämisen tueksi ääriarvot $y(\pm\sqrt{3}) = \pm 3\sqrt{3}/2$.
12. Asymptootit ovat $x = 0$ ja $y = x$. Kolmion ala on 2.