

Calculus^{Lukion}



MAA12 NUMEERISIA JA ALGEBRALLISIA MENETELMIÄ

Paavo Jäppinen

Alpo Kupiainen

Matti Räsänen

Otava

**PIKATESTIN JA KERTAUSKOKOKEIDEN
TEHTÄVÄT RATKAISUINEEN**

Pikatesti

1. Ilmoita annetun luvun likiarvo ensin kahden desimaalin ja sitten kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella. a) $\frac{\pi}{4}$ b) $-\frac{5}{9}$ c) 8794,94949

Ratkaisu:

a) $\frac{\pi}{4} \approx 0,79$ ja $\frac{\pi}{4} \approx 0,785$ b) $-\frac{5}{9} \approx -0,56$ ja $-\frac{5}{9} \approx -0,556$
 c) $8794,94949 \approx 8\,794,95$ ja $8794,94949 \approx 8\,790$

2. Kolmion kanta on (116 ± 1) m ja korkeus $(12,2 \pm 0,2)$ m. Arvioi alan suhteellista virhettä.

Ratkaisu:

Kolmion kanta on $a = (116 \pm 1)$ m ja korkeus $h = (12,2 \pm 0,2)$ m. Pinta-alan

$$A = \frac{1}{2}ah \text{ suhteellinen virhe on enintään } \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right| = \frac{1}{116} + \frac{0,2}{12,2} \approx 2,5 \%. \text{ (Samaan tulokseen päädytään maksimi-minimikeinoa käyttäen.)}$$

3. Jaa jakokulmassa $(2x^3 + 5x^2 - x - 6) : (x + 2)$.

Ratkaisu:

$$\begin{array}{r} 2x^2 + x - 3 \\ x + 2 \overline{) 2x^3 + 5x^2 - x - 6} \\ \underline{\mp 2x^3 \mp 4x^2} \\ x^2 - x \\ \underline{\mp x^2 \mp 2x} \\ - 3x - 6 \\ \underline{\pm 3x \pm 6} \\ 0 \end{array}$$

Jakolaskussa $(2x^3 + 5x^2 - x - 6) : (x + 2)$ saatava osamäärä on $2x^2 + x - 3$.

4. Määritä vakiolle a sellainen arvo, että jako $(x^4 - 12x^3 + 15x + a) : (x + 1)$ menee tasan.

Ratkaisu:

Jako $(x^4 - 12x^3 + 15x + a) : (x + 1)$ menee tasan, kun

$$(-1)^4 - 12 \cdot (-1)^3 + 15 \cdot (-1) + a = 0. \text{ Tästä } 1 + 12 - 15 + a = 0 \text{ ja } a = 2.$$

5. Määritä yhtälön $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$ kaikki juuret.

Ratkaisu: Merkitään $x^2 = y$, jolloin $4y^2 + 3y - 1 = 0$ ja $y = \frac{1}{4}$ tai $y = -1$. Alkuperäisen yhtälön ratkaisu on siis $x = \pm \frac{1}{2}$ tai $x = \pm i$.

6. Käytä laskimellasi toistuvasti palautuskaavaa $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n^2 - 1}{3x_n^2 + 2x_n}$ alkuarvon ollessa 1 kunnes saat kahdesti peräkkäin saman tuloksen. Mikä on tämä tulos ja mitä se tarkoittaa?

Ratkaisu:

Palautuskaava $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n^2 - 1}{3x_n^2 + 2x_n}$ antaa alkuarvolla 1 tuloksen 0,7548776662,

joka on yhtälön $x^3 + x^2 - 1 = 0$ juuren likiarvo.

7. Yhtälöllä $x = 0,3^x$ on juuri välillä $]0, 1[$. Määritä sen nelidesimaalinen likiarvo kiintopistemenetelmällä käyttäen alkuarvausta $x_0 = 0,5$.

Ratkaisu:

Yhtälön $x = 0,3^x$ iterointi alkuarvolla $x_0 = 0,5$ antaa juuren likiarvon 0,5290.

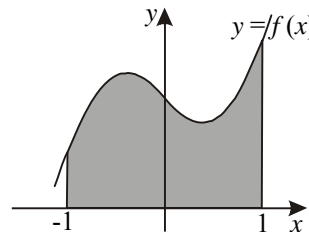
8. Määritä keskeisdifferenssiä ja h :n arvoa 0,01 käyttäen nelidesimaalinen likiarvo derivaatalle $f'(0)$, kun $f(x) = 3^x$.

Ratkaisu:

$$f'(0) \approx \frac{3^{0,01} - 3^{-0,01}}{0,02} \approx 1,0986$$

9. Oheisen kuvan funktiosta on käytettävissä seuraavat tiedot:

x	-1,0	-0,5	0	0,5	1,0
$f(x)$	0,48	1,30	1,00	0,81	1,42



Määritä korostetun alueen pinta-ala puolisuunnikas-säännöllä.

Ratkaisu:

$$A \approx \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \cdot 0,48 + 1,30 + 1,00 + 0,81 + \frac{1}{2} \cdot 1,42 \right] = 2,03$$

10. Määritä edellisen tehtävän pinta-ala Simpsonin säännöllä.

Ratkaisu:

$$A \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} [0,48 + 4 \cdot 1,30 + 2 \cdot 1,00 + 4 \cdot 0,81 + 1,42] \approx 2,06$$

Kertauskoe 1

1. Ison muoviputken sisähalkaisijaksi mitattiin $(25,5 \pm 0,5)$ cm ja pituudeksi (600 ± 1) cm. Laske putken tilavuus virherajoihin.

Ratkaisu:

Muoviputken tilavuus on $V = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 l = \frac{\pi}{4} d^2 l = \frac{\pi}{4} \cdot 2,55^2 \cdot 60,0 \text{ dm}^3 \approx 306,4 \text{ dm}^3$.

Suhteellinen virhe on enintään $2 \left| \frac{\Delta d}{d} \right| + \left| \frac{\Delta l}{l} \right| = 2 \cdot \frac{0,5}{25,5} + \frac{1}{600} \approx 0,0409$, joten absoluuttinen virhe on enintään $0,0409 \cdot 306,4 \text{ dm}^3 \approx 12,5 \text{ dm}^3$. Putken tilavuus on

$(306 \pm 13) \text{ dm}^3$ (litraa). *Toisin:*

$$|\Delta V| \leq \frac{V_{\max} - V_{\min}}{2} = \frac{\pi(1,30^2 \cdot 60,1 - 1,25^2 \cdot 59,9)}{2} \text{ dm}^3 \approx 12,5 \text{ dm}^3. \text{ Tulos kuten edellä.}$$

2. Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 1,5x + 4,501y = a \end{cases}$ vakion a arvoilla 16,503 ja 16,502 ja vertaa saamiasi tuloksia. Miten tämä esimerkki liittyy numeeristen menetelmien käyttöön?

Ratkaisu:

Yhtälöparin $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 1,5x + 4,501y = 16,503 \end{cases}$ ratkaisu on $x = 2$ ja $y = 3$.

Yhtälöparin $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 1,5x + 4,501y = 16,502 \end{cases}$ ratkaisu on $x = 5$ ja $y = 2$.

Esimerkki osoittaa, että pienet muutokset lähtöarvoissa voivat vaikuttaa lopputulokseen paljon. Tällaisissa häiriöalttiissa tilanteissa on kiinnitettävä erityistä huomiota lähtöarvojen tarkkuuteen ja tulosten luotettavuuteen.

3. Määritä jakojäännös, kun polynomi $x^6 - 5x^4 + 3x - 5$ jaetaan binomilla $x - 2$.

Ratkaisu: Kun polynomi $P(x) = x^6 - 5x^4 + 3x - 5$ jaetaan binomilla $x - 2$, saadaan jakojäännökseksi $P(2) = -15$.

4. Osoita, että yhtälöllä $x + 2e^x = 0$ on tarkalleen yksi juuri ja määritä laskimella sen kuusidesimaalinen likiarvo. Esittele käyttämäsi menetelmä.

Ratkaisu: Merkitään $f(x) = x + 2e^x$, jolloin $f'(x) = 1 + 2e^x$. Koska derivaatta on kaikkialla positiivinen ja funktio saa välin $[-1, 0]$ päätepisteissä erimerkkiset arvot, funktiolla f on tarkalleen yksi nollakohta. Se on välillä $]-1, 0[$ ja on yhtälön $x + 2e^x = 0$ ainoa juuri. Juuren likiarvon $-0,852606$ voi helposti määrittää iteroimalla yhtälöä $x = -2e^x$ esimerkiksi alkuarvolla $-0,5$. Iteraatio suppenee melko hitaasti. Vertailun vuoksi voi käyttää tässä tilanteessa paljon nopeammin suppenevaa Newtonin menetelmää.

5. Käyrät $y = \ln(1 + e^x)$, $y = 0$, $x = -1$ ja $x = 2$ rajaavat tasoalueen. Määritä sen pinta-ala puolisuunnikkasäännöllä käyttämällä kuutta jakoväliä.

Ratkaisu:

$$A \approx \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} f(-1) + f(-0,5) + f(0) + f(0,5) + f(1) + f(1,5) + \frac{1}{2} f(2) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \ln(1 + e^{-1}) + \dots + \frac{1}{2} \ln(1 + e^2) \right] \approx 3,1880$$

6. Määritä $f'(0,5)$ **a)** erotusosamäärää, **b)** keskeisdifferenssiä käyttäen, kun $f(x) = (x+1)^x$. Käytä h :n arvoa 0,001 ja ilmoita tulos viidellä desimaalilla.

Ratkaisu:

$$\mathbf{a)} f'(0,5) \approx \frac{(0,501+1)^{0,501} - (0,5+1)^{0,5}}{0,001} \approx 0,90585$$

$$\mathbf{b)} f'(0,5) \approx \frac{(0,501+1)^{0,501} - (0,499+1)^{0,499}}{0,002} \approx 0,90484$$

7. Sovella Newtonin menetelmää funktioon $f(x) = x^3 - a$, ja johda $\sqrt[3]{a}$:n laskemiseksi palautuskaava $x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{a}{x_n^2} \right)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Määritä laskimella tämän palautuskaavan avulla $\sqrt[3]{5}$:n likiarvo kuudella oikein pyöristetyllä desimaalilla lähtien alkuarvauksesta $x_0 = 2$. Kuinka monta iteraatioaskelta tarvitaan kyseiseen likiarvoon pääsemiseksi?

Ratkaisu:

Funktion $f(x) = x^3 - a$ nollakohta on $\sqrt[3]{a}$. Sen likiarvon laskemiseksi valitaan alkuarvo x_0 ja käytetään Newtonin palautuskaavaa $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, joka saa nyt

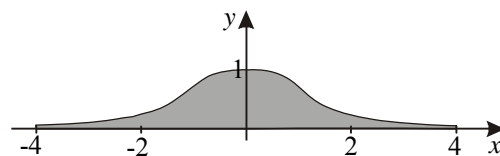
$$\text{muodon } x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - a}{3x_n^2} = x_n - \frac{x_n}{3} + \frac{a}{3x_n^2} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{a}{x_n^2} \right).$$

Luvun $\sqrt[3]{5}$ likiarvoon 1,709976 tarvitaan kolme iterointia alkuarvon ollessa $x_0 = 2$.

8. Pengertien poikkileikkaus noudattaa oikei-

seen kuvaan piirrettyä käyrää $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$

välillä $[-4, 4]$. Laske kuvaan korostettu pinta-ala Simpsonin säännöllä käyttäen kahdeksaa jakoväliä. Kuinka suuri on pinta-ala todellisuudessa, kun kuvan yksikkö vastaa viittä metriä luonnossa? Kuinka monta kuutiometriä täytemaata on ajettava 70 metriä pitkälle tien osuudelle?



Ratkaisu:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}, \quad a = -4, \quad b = 4 \text{ ja } h = 1.$$

$$A \approx \frac{1}{3} [f(-4) + 4f(-3) + 2f(-2) + 4f(-1) + 2f(0) + 4f(1) + 2f(2) + 4f(3) + f(4)] \approx 3,212$$

Pinta-ala todellisuudessa on noin $25 \cdot 3,212 \text{ m}^2 = 80,3 \text{ m}^2$. Täytemaata on ajettava 70 metrin matkalle $70 \cdot 80,3 \text{ m}^3 \approx 5\,600 \text{ m}^3$.

Kertauskoe 2

1. a) Ilmoita kahdella eri tavalla mittaustuloksen 0,607 g tarkkuus.

b) Arvioi lausekkeen $\frac{(52,9 \text{ m})^3}{6,2 \text{ m} \cdot 18,9 \text{ m}}$ virhettä, kun kunkin siinä esiintyvän mittaustuloksen virhe on enintään 0,05 m.

Ratkaisu:

a) Mittaustulos 0,607 g on ilmaistu
– kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella
– kolmen desimaalin tarkkuudella, yksikkönä gramma
– milligramman tarkkuudella.

b) Lausekkeen $\frac{(52,9 \text{ m})^3}{6,2 \text{ m} \cdot 18,9 \text{ m}}$ ($\approx 1\,263,3 \text{ m}$) suhteellinen virhe on enintään

$$3 \cdot \frac{0,05}{52,9} + \frac{0,05}{6,2} + \frac{0,05}{18,9} \approx 0,01355 \approx 1,4 \%. \text{ Absoluuttinen virhe on enintään}$$

$0,01355 \cdot 1\,263,3 \text{ m} \approx 17,1 \text{ m}$. Kun virhe pyöristetään sääntöjen mukaan ylöspäin, saadaan virherajaksi 20 m.

$$\text{Toisin: Absoluuttinen virhe on enintään } \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{52,95^3}{6,15 \cdot 18,85} - \frac{52,85^3}{6,25 \cdot 18,95} \right) \text{ m} \approx 17,1 \text{ m}.$$

Tulokset ovat samat kuin edellä.

2. Polynomi $P(x) = x^4 - 15000x^3 - 15000x^2 - 15000x - 15001$ voidaan kirjoittaa muotoon $((x - 15\,000)x - 15\,000)x - 15\,001$. Määritä laskimen avulla $P(15\,001)$ kumpaakin esitysmuotoa käyttäen. Miten selität toisistaan mahdollisesti eroavat tulokset?

Ratkaisu:

Polynomia $P(x) = x^4 - 15\,000x^3 - 15\,000x^2 - 15\,000x - 15\,001$ käytettäessä saadaan (esimerkiksi) $P(15\,001) = 199$. Kun arvon laskemisessa käytetään polynomin toista muotoa, $((x - 15\,000)x - 15\,000)x - 15\,001$, saadaan oikea tulos 0.

Tulosten ero aiheutuu yleisimmin laskimen sisäisestä laskentatarkkuudesta, joka voi olla vain 15 numeroa. Kun esimerkiksi potenssissa $15\,001^4$ on 17 numeroa, katoaa laskennan aikana merkitseviä numeroita ja saadaan virheellinen tulos.

3. Trinomi $x^2 - x - 1$ on polynomin $P(x) = 3x^4 - 3x^3 - 4x^2 + x + 1$ tekijä. Määritä polynomin $P(x)$ kaikki nollakohdat. Tarkat arvot.

Ratkaisu:

Kun polynomi $P(x) = 3x^4 - 3x^3 - 4x^2 + x + 1$ jaetaan trinomilla $x^2 - x - 1$, saadaan $3x^2 - 1$. Tekijöiden $x^2 - x - 1$ ja $3x^2 - 1$ nollakohdat $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ja $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ ovat polynomin $P(x)$ kaikki nollakohdat.

4. Määritä laskimella kaksi funktion $f(x) = 2x - e^{\sqrt{x}}$ nollakohtaa kuuden desimaalin tarkkuudella. Esittele käyttämäsi menetelmä.

Ratkaisu:

Funktiolla $f(x) = 2x - e^{\sqrt{x}}$ on nollakohdat väleillä $]2, 3[$ ja $]6, 7[$. Molemmat niistä löytyvät Newtonin menetelmällä, jossa $x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n - e^{\sqrt{x_n}}}{2 - e^{\sqrt{x_n}} / (2\sqrt{x_n})}$. Likiarvot ovat 2,214031 ja 6,853226. Kiintopistemenetelmä antaa vain pienemmän nollakohdan.

5. Fibonacci laski vuonna 1225 yhtälön $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ juurelle erittäin hyvän likiarvon $x = 1,368808107$. Hänen käyttämänsä menetelmää ei tiedetä. **a)** Osoita, että Fibonaccin yhtälöllä on vain yksi reaalijuuri. **b)** Määritä juuren likiarvo käyttäen sekä Newtonin menetelmää että kiintopistemenetelmää alkuarvolla $x_0 = 1$ ja ilmoita, monesko iterointikierrös tuottaa ensimmäisen kerran Fibonaccin löytämän likiarvon. (Ohje: Käytä kiintopistemenetelmässä yhtälön muotoa $x = \frac{20}{x^2 + 2x + 10}$.)

Ratkaisu:

a) Merkitään $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$, jolloin $f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$. Koska derivaatta on kaikkialla positiivinen ja funktio saa välin $[1, 2]$ päätepisteissä erimerkkiset arvot, funktiolla on tasan yksi nollakohta ja siis yhtälöllä $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ vain yksi juuri.

Newtonin menetelmällä saadaan 4. iteraatiokierröksellä tulos 1,3688081078.

Kiintopistemenetelmällä saadaan 24. iteroinnilla tulos 1,3688081065.

6. Määritä kuusidesimaalinen likiarvo derivaatalle $f'(0)$, kun $f(x) = \frac{\cos(x+2)}{x-1}$. Käytä määrittäksessä keskeisdifferenssiä h :n arvolla 0,001.

Ratkaisu:

$$f'(0) \approx \frac{f(0+h) - f(0-h)}{2h} = \frac{\frac{\cos(2+0,001)}{-1+0,001} - \frac{\cos(2-0,001)}{-1-0,001}}{0,002} \approx 1,325445$$

Tuloksessa on viisi oikeaa desimaalia.

7. Laske sekä puolisuunnikassäännöllä että Simpsonin säännöllä integraali $\int_0^9 f(x)dx$ taulukon tietojen perusteella.

x	0	1,5	3,0	4,5	6,0	7,5	9,0
$f(x)$	3,174	4,680	5,277	5,786	4,331	2,417	2,246

Ratkaisu:

Puolisuunnikassääntö:

$$\int_0^9 f(x)dx \approx 1,5 \cdot \left[\frac{1}{2} f(0) + f(1,5) + f(3,0) + f(4,5) + f(6,0) + f(7,5) + \frac{1}{2} f(9,0) \right]$$

$$\approx 37,8$$

Simpsonin sääntö:

$$\int_0^9 f(x)dx \approx \frac{1,5}{3} \cdot [f(0) + 4f(1,5) + 2f(3,0) + 4f(4,5) + 2f(6,0) + 4f(7,5) + f(9,0)]$$

$$\approx 38,1$$

8. Lammaskiinnitetään narulla ympyrän muotoisen r -säteisen nurmikon reunaan. Kuinka pitkä pitää liekanarun olla, jotta lammas pystyy syömään ruohoa puolelta ympyräalueelta?

Ratkaisu:

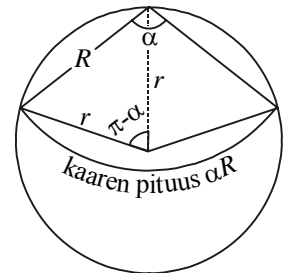
Alue muodostuu kahdesta segmentistä ja R -säteisestä sektorista, jonka keskuskulma on α . Kosinilauseella saadaan keskuskolmiosta yhtälö

$R^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cos(\pi - \alpha)$. Koska $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, yhtälö sievenee muotoon $R^2 = 2r^2(1 + \cos \alpha)$. Pinta-alalle saadaan yhtälö

$$\frac{1}{2} \pi r^2 = 2 \left(\frac{\pi - \alpha}{2\pi} \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin(\pi - \alpha) \right) + \frac{1}{2} \alpha R^2$$

$$= \pi r^2 - \alpha r^2 - r^2 \sin \alpha + \frac{1}{2} \alpha 2r^2(1 + \cos \alpha)$$

$$= \pi r^2 - r^2 \sin \alpha + \alpha r^2 \cos \alpha,$$



josta $\alpha \cos \alpha - \sin \alpha + \frac{\pi}{2} = 0$. Merkitään

$f(\alpha) = \alpha \cos \alpha - \sin \alpha + \frac{\pi}{2}$, jolloin $f'(\alpha) = -\alpha \sin \alpha$. Välillä $[0, \pi]$ funktio on ai-

dosti vähenevä ja saa päätepisteissä erimerkkiset arvot, joten kyseisellä välillä on tarkalleen yksi nollakohta. Newtonin menetelmällä saadaan sen likiarvoksi $\alpha \approx 1,9056957$, joten $R \approx 1,159r$. Narun on oltava 16 % alueen sädettä pitempi.