

# Calculus<sup>Lukion</sup>

5

MAA9 TRIGONOMETRISET FUNKTIOT JA LUKUJONOT

Paavo Jäppinen

Alpo Kupiainen

Matti Räsänen

Otava

**PIKATESTIN JA KERTAUSKOKEIDEN  
TEHTÄVÄT RATKAISUINEEN**

## Pikatesti (MAA9)

1. Muunna **a)** radiaaneiksi  $-1777^\circ$ , **b)** asteiksi  $1777$  radiaania.

*Ratkaisu:*

$$\mathbf{a)} -1777^\circ = -1777 \cdot \frac{\pi}{180} \approx -31,0 \text{ rad} \quad \mathbf{b)} 1777 = 1777 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 101814,6^\circ$$

2. Ympyrän sektorin keskuskulma on  $\frac{7\pi}{4}$  ja sitä vastaavan kaaren pituus  $5,5$  cm.

Laske **a)** ympyrän säteen pituus, **b)** sektorin pinta-ala.

*Ratkaisu:*

$$\mathbf{a)} r = \frac{5,5 \text{ cm}}{\frac{7\pi}{4}} \approx 1,0 \text{ cm} \quad \mathbf{b)} A = \frac{1}{2} \cdot 5,5 \text{ cm} \cdot 1,0 \text{ cm} \approx 2,8 \text{ cm}^2$$

3. Määritä funktion  $f$  suurin ja pienin arvo.

$$\mathbf{a)} f(x) = \sin 5x \quad \mathbf{b)} f(x) = 2 \sin 5x \quad \mathbf{c)} f(x) = 1 + 2 \sin 5x$$

*Ratkaisu:*

Käytetään hyväksi tietoa, että sinifunktion suurin arvo on  $1$  ja pienin  $-1$ .

**a)**  $\sin 5x$ :n suurin arvo  $1$  ja pienin arvo  $-1$ . (Esim.  $5x = \pi/2$  ja  $5x = -\pi/2$ )

**b)**  $2\sin 5x$ :n suurin arvo on  $2$  ja pienin arvo  $-2$ . (Vrt. a-kohta)

**c)**  $(1 + 2\sin 5x)$ :n suurin arvo  $3$  ja pienin arvo  $-1$ . (Vrt. a-kohta)

4. Ratkaise yhtälö. Ilmoita tulos asteina.

$$\mathbf{a)} \sin 3x = \frac{2}{3} \quad \mathbf{b)} \sin x = \sin 35^\circ \quad \mathbf{c)} \cos x - \sin x = 0$$

*Ratkaisu:*

$$\mathbf{a)} \sin 3x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x = 41,8^\circ + n \cdot 360^\circ \text{ tai } 3x = 138,2^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = 13,9^\circ + n \cdot 120^\circ \text{ tai } x = 46,1^\circ + n \cdot 120^\circ$$

$$\mathbf{b)} \sin x = \sin 35^\circ \Leftrightarrow x = 35^\circ + n \cdot 360^\circ \text{ tai } x = 145^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$\mathbf{c)} \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = 45^\circ + n \cdot 180^\circ$$

5. Derivoi.

$$\mathbf{a)} \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad \mathbf{b)} \frac{\cos x}{x^2} \quad \mathbf{c)} \tan \frac{x}{4}$$

*Ratkaisu:*

$$\mathbf{a)} D \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\mathbf{b)} D \frac{\cos x}{x^2} = \frac{x^2(-\sin x) - 2x \cos x}{x^4} = -\frac{x \sin x + 2 \cos x}{x^3} \quad \mathbf{c)} D \tan \frac{x}{4} = \frac{1}{4} (1 + \tan^2 \frac{x}{4})$$

6. Jatka lukujonoa kolmella luvulla. Etsi löytämäsi sääntöä noudattava yleisen jäsenen  $a_n$  lauseke.

a) 5, 8, 11, ...      b)  $\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \dots$       c) 3, 12, 27, ...

*Ratkaisu:*

a) 14, 17, 20,  $a_n = 2 + 3n$       b)  $\frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \frac{6}{8}, a_n = \frac{n}{n+1}$       c) 48, 75, 108,  $a_n = 3n^2$

7. Määritä lukujonon  $(a_n)$  kymmenes jäsen, kun  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$  ja  $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ , kun  $n \geq 2$ .

*Ratkaisu:*

Jäsenet kolmannelta lähtien saadaan kahden edellisen summana. Jonon kymmenen ensimmäistä jäsentä ovat: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123. Näin ollen  $a_{10} = 123$ .

8. Tutki lukujonon suppenevuutta ja määritä raja-arvo, mikäli lukujono suppenee.

a)  $a_n = \frac{3n-1}{n+1}$       b)  $a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$       c)  $a_n = 5^n - 5$

*Ratkaisu:*

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 3$ . Lukujono suppenee, ja raja-arvo on 3.

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} = 0$ . Lukujono suppenee, ja raja-arvo on 0.

c) Lukujono hajaantuu, sillä  $\lim_{n \rightarrow \infty} (5^n - 5) = \infty$ .

9. Laske summa.

a)  $7 + 14 + 21 + \dots + 539$       b)  $7 + 49 + 343 + \dots + 823\,543$

*Ratkaisu:*

a) Summa on aritmeettinen,  $a_1 = 7$  ja  $d = 7$ . Yhteenlaskettavien lukumäärä  $n = 77$  lasketaan yhtälöstä  $539 = 7 + (n-1) \cdot 7$ . Tällöin  $S = 77 \cdot \frac{7+539}{2} = 21\,021$ .

b) Summa on geometrinen,  $a_1 = 7$  ja  $q = 7$ . Yhteenlaskettavien lukumäärä  $n = 7$  lasketaan yhtälöstä  $823\,543 = 7 \cdot 7^{n-1}$ . Tällöin  $S = \frac{7 \cdot (1-7^7)}{1-7} = 960\,799$ .

10. Sadantuhannen euron laina maksetaan takaisin kymmenessä vuodessa suorittamalla kunkin vuoden lopussa lyhennyksestä ja korosta muodostuva vakioerä. Minkä suuruinen tämä vakioerä on, kun vuotuinen korko on neljä prosenttia?

*Ratkaisu:*

Soveltamalla annuiteetin kaavaa  $a = \frac{\alpha^n(1-\alpha)}{1-\alpha^n} \cdot k$  saadaan

$$a = \frac{1,04^{10}(1-1,04)}{1-1,04^{10}} \cdot 100\,000 \approx 12\,329,09 \text{ (euroa)}$$

## Kertauskoe 1 (MAA9)

1. Johda käyrälle  $y = \sin x$  origoon asetetun tangentin yhtälö. Laske sitten  $x$ :n arvoa 0,25 vastaava  $y$ :n arvo sekä käyrältä että tangentilta ja ilmoita arvot kahdella desimaalilla.

*Ratkaisu:*

Origoon asetetun tangentin yhtälö on muotoa  $y = f'(0) \cdot x$ . Koska  $f(x) = \sin x$ , on  $f'(0) = \cos 0 = 1$ . Näin ollen tangentin yhtälö on  $y = x$ . Arvo käyrältä on  $y = \sin 0,25 \approx 0,25$ , ja arvo tangentilta  $y = x = 0,25$ .

2. Ratkaise yhtälö. Ilmoita vastaus radiaaneina.

a)  $\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -0,222$       b)  $\sin 2x = \sin 3x$       c)  $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

*Ratkaisu:*

a)  $\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -0,222 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + x = \pm 1,795 + n \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \pm 1,795 - \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$   
 $\Leftrightarrow x = 1,01 + n \cdot 2\pi$  tai  $x = -2,58 + n \cdot 2\pi$

b)  $\sin 2x = \sin 3x \Leftrightarrow 2x = 3x + n \cdot 2\pi$  tai  $2x = \pi - 3x + n \cdot 2\pi$   
 $\Leftrightarrow x = n \cdot 2\pi$  tai  $x = \frac{\pi}{5} + n \cdot \frac{2\pi}{5}$

c)  $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$  tai  $3x = \pi - \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$  tai  $x = \frac{2\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$

3. Laske lausekkeen  $\sin x + \sin y$  suurin arvo, kun  $x$  ja  $y$  ovat suorakulmaisen kolmion terävät kulmat.

*Ratkaisu:*

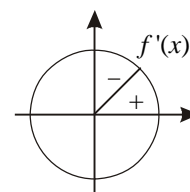
Oletuksen mukaan  $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$  ja  $x + y = \frac{\pi}{2}$ , joten

$$\sin x + \sin y = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x + \cos x. \text{ Funktion}$$

$f(x) = \sin x + \cos x$  derivaatan  $f'(x) = \cos x - \sin x$  nollakohdat

saadaan yhtälöstä  $\tan x = 1$ . Ainoa kysymykseen tuleva kulma on  $\frac{\pi}{4}$ .

Se on maksimikohta, ja funktio saa siinä suurimman arvonsa  $\sqrt{2}$ .



4. Määritä ne kaksi lukua, joiden summa, erotus, tulo ja osamäärä ovat tässä järjestyksessä aritmeettisen jonon peräkkäisiä jäseniä.

*Ratkaisu:*

Olkoot luvut  $a$  ja  $b$ . Tällöin jonon peräkkäiset jäsenet ovat  $a + b$ ,  $a - b$ ,  $ab$  ja  $\frac{a}{b}$ . Eh-

dosta, että kyseessä on aritmeettinen lukujono saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} a - b - (a + b) = ab - (a - b) \\ \frac{a}{b} - ab = ab - (a - b) \end{cases} \text{ ja edelleen } \begin{cases} a(b - 1) = -3b \\ a\left(\frac{1}{b} - 2b + 1\right) = b. \end{cases}$$

Ratkaisuna saadaan  $a = -\frac{9}{8}$  ja  $b = -\frac{3}{5}$ .

5. Metsäpalstalla on kaikkiaan 7 000 eri-ikäistä puuta, taimet mukaan lukien. Joka vuosi metsää harvennetaan 12 % puista ja samalla istutetaan 600 puuntainta. Kuinka monta puuta metsässä on kahdeksan vuoden kuluttua viimeisen istutuksen jälkeen?

*Ratkaisu:*

Puumäärä kahdeksantena vuotena viimeisen istutuksen jälkeen on

$$0,88^8 \cdot 7000 + 600 \cdot (0,88^7 + 0,88^6 + \dots + 1) = 0,88^8 \cdot 7000 + \frac{600 \cdot (1 - 0,88^8)}{1 - 0,88} \approx 5700.$$

Kahdeksan vuoden kuluttua metsässä on noin 5 700 puuta.

6. Määritä lukujonon  $a_n = \frac{n^2}{n^3 + 210}$  suurin jäsen. Ilmoita suurimman jäsenen tarkka arvo sekä likiarvo viiden desimaalin tarkkuudella.

*Ratkaisu:*

Tutkitaan funktiota  $f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 210}$ ,  $x \geq 1$ , joka on jatkuva välillä  $x \geq 1$  ja derivoituva välillä  $x > 1$ . Derivaatan  $f'(x) = \frac{420x - x^4}{(x^3 + 210)^2}$  ainoa nollakohta

$x = \sqrt[3]{420} \approx 7,49$  on funktion suurimman arvon kohta. Arvoilla  $1 \leq x \leq \sqrt[3]{420}$  funktio on aidosti kasvava ja arvoilla  $x \geq \sqrt[3]{420}$  aidosti vähenevä. Siksi jompikumpi luvuista  $f(7)$  tai  $f(8)$  on lukujonon suurin jäsen. Koska  $f(7) = \frac{7}{9} \approx 0,08861$  ja

$f(8) = \frac{32}{361} \approx 0,08864$ , lukujonon kahdeksas jäsen  $a_8 = \frac{32}{361} \approx 0,08864$  on suurin.

7. Lausu lukua  $n$  käyttäen summa  $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + \dots + (3n - 2) + (3n - 1)$ .

*Ratkaisu:*

Summa voidaan jakaa kahdeksi osasummaksi seuraavasti:

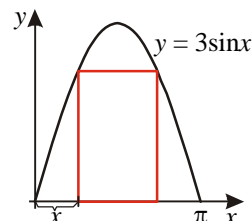
$$\begin{aligned} & 1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + \dots + (3n - 2) + (3n - 1) \\ &= (1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2)) + (2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1)) \end{aligned}$$

Edellinen on aritmeettinen summa, jossa  $a_1 = 1$ ,  $d = 3$ , termien lukumäärä  $n$  ja summan arvo  $S = n \cdot \frac{1 + (3n - 2)}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}$ .

Jälkimmäisessä summassa  $a_1 = 2$ ,  $d = 3$ , termien lukumäärä  $n$  ja summan arvo

$$S = n \cdot \frac{2 + (3n - 1)}{2} = \frac{3n^2 + n}{2}. \text{ Yhteensä osasummat ovat } \frac{3n^2 - n}{2} + \frac{3n^2 + n}{2} = 3n^2.$$

8. Millä muuttujan  $x$  arvolla oheiseen kuvaan piirretyn suorakulmion piiri on pisin mahdollinen? Ilmoita vastaus kolmen desimaalin tarkkuudella.



*Ratkaisu:*

Käyrä  $y = 3 \sin x$  kulkee origon kautta ja sen ensimmäinen positiivinen nollakohta on  $x = \pi$ . Suorakulmion kannan pituus on kuvan merkintöjen mukaisesti  $\pi - 2x$ .

Piirin pituuden ilmaisee funktio  $p(x) = 2(\pi - 2x) + 6 \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ . Derivaatan

$$p'(x) = -4 + 6 \cos x \text{ ainoa nollakohta } x \approx 0,841 \text{ ratkeaa yhtälöstä } \cos x = \frac{2}{3}. \text{ Siinä}$$

kohdassa piiri saavuttaa pisimmän arvonsa  $p(0,841) \approx 7,39$ , sillä määrittelyvälin

päätepistearvot  $p(0) = 2\pi$  ja  $p(\frac{\pi}{2}) = 6$  ovat sitä pienempiä.

## Kertauskoe 2 (MAA9)

1. Kulma  $\alpha$  on kolmannessa neljänneksessä ja  $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$ . Määritä funktioiden  $\cos \alpha$  ja  $\tan \alpha$  tarkat arvot.

*Ratkaisu:*

Koska kulma  $\alpha$  on kolmannessa neljänneksessä, sen kosini on negatiivinen.

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13}, \quad \tan \alpha = \frac{-5/13}{-12/13} = \frac{5}{12}$$

2. Ratkaise yhtälö.

a)  $\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$       b)  $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$       c)  $\tan 3x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

*Ratkaisu:*

a)  $\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} - 2x + n \cdot 2\pi$  tai  $2x = \pi - \left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + n \cdot 2\pi$   
 $\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{16} + n \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 &\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \pm \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \text{ tai } x = -\pi + n \cdot 2\pi \\ \text{c) } \tan 3x = \frac{1}{\sqrt{3}} &\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{6} + n\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + n \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

3. Määritä funktion  $f$  suurin arvo. **a)**  $f(x) = 4 - \cos 4x$       **b)**  $f(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$

*Ratkaisu:*

**a)**  $\cos 4x$ :n suurin arvo on 1 ja pienin  $-1$ . (Esim.  $4x = 0$  ja  $4x = \pi$ ). Silloin funktion  $f(x) = 4 - \cos 4x$  suurin arvo on 5 ja pienin 3.

*Toisin:* Tehtävä voidaan ratkaista myös tavalliseen tapaan ääriarvotehtävänä funktion derivaattaa käyttäen.

**b)** Muunnoskaavan  $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  avulla funktion  $f(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$  lauseke saadaan muotoon  $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ . Koska  $x$  saa kaikki reaalilukuarvot,  $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ :n suurin arvo on 1, joten funktion suurin arvo on  $\sqrt{2}$ .

*Toisin:* Jaksollisuuden takia  $f(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = \sin\left(\frac{x}{2} + n2\pi\right) + \cos\left(\frac{x}{2} + n2\pi\right) = \sin \frac{1}{2}(x + n4\pi) + \cos \frac{1}{2}(x + n4\pi)$ . Nähdään, että funktion arvot toistuvat  $4\pi$ :n välein, joten rajataan tutkimus välille  $[0, 4\pi]$ . Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$f(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \tan \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + n2\pi$$

Kysymykseen tulevat kohdat  $\frac{\pi}{2}$  ja  $\frac{5\pi}{2}$ . Koska  $f(0) = 1$ ,  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}$ ,

$$f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = -\sqrt{2} \text{ ja } f(4\pi) = 1, \text{ funktion suurin arvo on } \sqrt{2}.$$

4. Helsingin Nikolain kirkon portaat ovat lampuilla valaistavat: ylimmälle portaalle asetetaan yksi lamppu, toiselle kaksi, kolmannelle kolme jne., niin että kullekin portaalle pannaan yksi lamppu enemmän kuin lähinnä olevalle ylimmälle portaalle. Tähän tarvitaan 1 081 lamppua. Montako porrasta on? (yo-teht. 1880)

*Ratkaisu:*

Portaalle asetetut lamput muodostavat aritmeettisen jonon, jossa  $a_1 = 1$  ja  $d = 1$ .

Alimmalle portaalle tarvittavien lamppujen määrä  $n$  on sama kuin portaiden lukumäärä, ja se ratkaistaan yhtälöstä  $1\,081 = n \cdot \frac{1 + (n-1) \cdot 1}{2}$ , joka sievenee toisen

asteen yhtälöksi  $n^2 + n - 2\,162 = 0$ . Positiivisena juurena  $n = 46$ , joka merkitsee portaitten lukumäärää.

5. Selvitä, mikä seuraavista maksutavoista on omakotitalon myyjälle edullisin.

Vaihtoehdossa A 60 000 euron kauppasummasta maksettaisiin kaupantekohetkellä 20 000 euroa, 20 000 euroa kahden vuoden kuluttua ja loput neljän vuoden kuluttua.

Vaihtoehdossa B 55 000 euron kauppasummasta maksettaisiin heti 40 000 euroa ja loput kolmen vuoden kuluttua.

Vaihtoehdossa C maksettaisiin kaupantekohetkellä 52 000 euroa. Laskennassa käytetään korkokantaa 4,7 %.

*Ratkaisu:*

Vaihtoehto A:  $20\,000 + 20\,000 \cdot 1,047^{-2} + 20\,000 \cdot 1,047^{-4} \approx 54\,888$  (euroa)

Vaihtoehto B:  $40\,000 + 15\,000 \cdot 1,047^{-3} \approx 53\,069$  (euroa)

Vaihtoehto C: 52 000 (euroa)

Vaihtoehto A on edullisin.

6. Geometrisen jonon kolmen ensimmäisen jäsenen summa on 3 ja kuuden ensimmäisen jäsenen summa 12. Laske yhdeksän ensimmäisen jäsenen summa.

*Ratkaisu:*

Olkoon jono  $a, aq, aq^2, \dots$ . Tällöin on  $a + aq + aq^2 = 3$  ja

$12 = a + aq + aq^2 + \dots + aq^5 = a + aq + aq^2 + q^3(a + aq + aq^2) = 3 + 3q^3$ .

Siis  $q^3 + 1 = 4$  eli  $q = \sqrt[3]{3}$ . Edelleen

$S = 12 + aq^6 + aq^7 + aq^8 + aq^9 = 12 + q^6(a + aq + aq^2) = 12 + 3(\sqrt[3]{3})^6 = 39$ .

7. Millä  $x$ :n arvoilla  $\ln 2$ ,  $\ln(2^x - 1)$  ja  $\ln(2^x + 1)$  ovat aritmeettisen lukujonon kolme ensimmäistä jäsentä? Ilmoita tarkka arvo ja likiarvo kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

*Ratkaisu:*

Ehto toteutuu, kun  $\ln(2^x + 1) - \ln(2^x - 1) = \ln(2^x - 1) - \ln 2$ . Sievennyksen tuloksena saadaan toisen asteen yhtälö  $(2^x)^2 - 4 \cdot 2^x - 1 = 0$ , jonka ratkaisuna  $2^x = 2 \pm \sqrt{5}$ .

Koska miinusmerkki ei tule kysymykseen, on  $x = \frac{\ln(2 + \sqrt{5})}{\ln 2} \approx 2,08$ .

8. Määritä ne  $xy$ -tason pisteet, joilla  $\sin x \sin y + \cos x \cos y = 1$ . Piirrä kuvio. (yo-teht. K90/8)

*Ratkaisu:*

Kosinin vähennyslaskukaavan perusteella yhtälö  $\sin x \sin y + \cos x \cos y = 1$  voidaan kirjoittaa muotoon  $\cos(x - y) = 1$ . Tämä toteutuu, kun  $x - y = n \cdot 2\pi$ . Yhtälö esittää parvea yhdensuuntaisia suoria  $y = x + n \cdot 2\pi$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ . Esimerkiksi, jos  $n = 0$ , suora on  $y = x$ .