

Calculus^{Lukion}

3

MAA5 VEKTORIT

*Ristitulo ja skalaarikolmitulo

Paavo Jäppinen Alpo Kupiainen Matti Räsänen Otava

TÄYDENTÄVÄ AINEISTO



Ristitulo ja skalaarikolmitulo

Opetussuunnitelman 2003 mukainen kurssi *Vektorit* (MAA5) sisältää vektoreiden laskutoimituksista keskeisenä aineksena yhteenlaskun, vähennyslaskun, vektorin kertomisen luvulla ja vektoreiden pistetulon eli skalaaritulon. Opetustilanteissa on sopivissa yhteyksissä totuttu käyttämään myös *ristituloa* ja *skalaarikolmituloa*. Tämä tiivistetty aineisto on laadittu tätä opettamisen vaihtoehtoa varten. Aineisto tukee myös opiskelijaa hänen siirtyessään lukiosta matemaattis-luonnontieteellisiin jatko-opintoihin.

Ristitulo eli vektoritulo

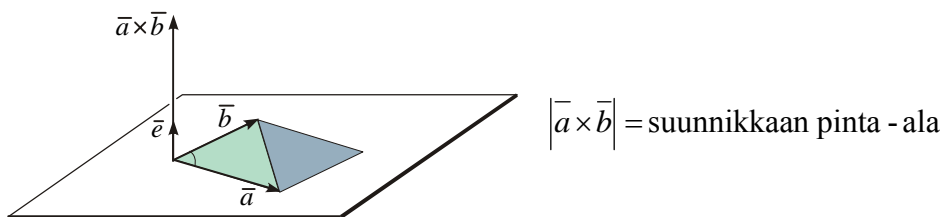
Vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} ristitulo eli *vektoritulo* tarkoittaa **vektoria**

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) \vec{e}$$

Merkintä $\vec{a} \times \vec{b}$ luetaan "a risti b". Vektori \vec{e} on vektoreita \vec{a} ja \vec{b} vastaan kohtisuorassa oleva yksikkövektori niin, että \vec{a} , \vec{b} ja \vec{e} tässä järjestyksessä muodostavat oikean käden järjestelmän (vrt. alla oleva kuva). Kun \vec{a} ja \vec{b} ovat yhdensuuntaisia, niin määritelmän mukaan $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Erikseen sovitaan, että $\vec{0} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{0} = \vec{0}$.

Koska aina $|\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) \geq 0$ ja $|\vec{e}| = 1$, on vektorin $\vec{a} \times \vec{b}$ pituus $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$.

Toisaalta tämä lauseke ilmoittaa vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} määräämän *suunnikkaan pinta-alan*, sillä vastaavan kolmion ala on $\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$, ja suunnikkaan ala on kaksi kertaa niin suuri.



Ristitulo noudattaa eräin poikkeuksin lukujen tulolle ominaisia laskulakeja. Niiden perusteella voidaan vektoreiden $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ ja $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ ristitulo laskea seuraavan säännön mukaisesti:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$

Tulos voidaan esittää *determinanttina* $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$ ja laskea käyttämällä

seuraavassa esimerkissä esitettyä muistisääntöä.

Esimerkki 1

Laske $\vec{a} \times \vec{b}$, kun $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ ja $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$.

Ratkaisu:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ \vec{i} & \vec{j} \end{matrix}$$

tulon vastaluku
tulo

$$= 8\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k} + 4\vec{k} - 3\vec{i} - 4\vec{j} = 5\vec{i} - 10\vec{j} + 5\vec{k}$$

Skalaarikolmitulo

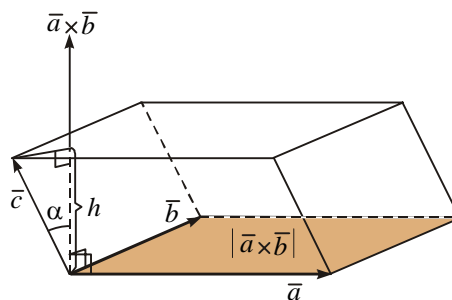
Kolmen vektorin \vec{a} , \vec{b} ja \vec{c} muodostamaa tuloa $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ sanotaan *skalaarikolmituloksi*. Merkintä voidaan kirjoittaa ilman sulkeita, koska vektoritulo on joka tapauksessa laskettava ensin, jotta lauseke olisi määritelty.

Koordinaatiston vektoreiden skalaarikolmitulo voidaan laskea determinanttina

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \text{ Tästä voi varmistua niin, että ensin muodostetaan vektori } \vec{a} \times \vec{b},$$

sitten tämän ja vektorin \vec{c} pistetulo ja verrataan näin saatua tulosta determinantista muodostettuun lausekkeeseen.

Tulkitaan skalaarikolmitulo $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$ geometrisesti. Kun vektorit \vec{a} , \vec{b} ja \vec{c} alkavat samasta pisteestä, ne määräävät suuntaissärmiön. Sen pohjan pinta-ala on $|\vec{a} \times \vec{b}|$.



Jos vektoreiden $\vec{a} \times \vec{b}$ ja \vec{c} välinen kulma on α , saadaan pistetulon määritelmän mukaan $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \alpha$. Tässä $|\vec{c}| \cos \alpha$ on särmiön korkeus tai sen vastaluku sen mukaan, onko α terävä vai tylppä. Särmiön korkeus on siis aina $|\vec{c}| |\cos \alpha|$, joten vektoreiden \vec{a} , \vec{b} ja \vec{c} määräämän **suuntaissärmiön tilavuus** on $V = |\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}|$.

Esimerkki 2

Laske skalaarikolmitulo $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$, kun $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ ja $\vec{c} = 5\vec{i} - 5\vec{j} + 5\vec{k}$.

Ratkaisu:

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -3 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 5 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 5 + 45 - 10 + 5 - 15 - 30 = 0$$

Skalaarikolmitulo on nolla. Silloin myös vektoreiden \vec{a} , \vec{b} ja \vec{c} määräämän suuntaisjärmiön tilavuus on nolla, mikä merkitsee, että vektorit \vec{a} , \vec{b} ja \vec{c} ovat samassa tasossa.

Seuraavissa sovelluksissa ratkaisut esitetään ensin ilman ristituloa ja sitten sitä käyttäen.

Kolmion pinta-ala

Laske kolmion $A(1, 2, 3)B(-2, 0, 5)C(-1, 4, 6)$ pinta-ala.

Ratkaisu:

Valitaan kolmion sivuvektoreiksi $\vec{AB} = \vec{b} = -3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ ja $\vec{AC} = \vec{c} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Pistetuloa soveltamalla saadaan niiden välisen kulman kosiniksi

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{6 - 4 + 6}{\sqrt{17} \sqrt{17}} = \frac{8}{17}, \text{ jolloin } \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{8}{17}\right)^2} = \frac{15}{17}. \text{ Kolmion pinta-ala}$$

$$\text{on näin ollen } A = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{17} \cdot \sqrt{17} \cdot \frac{15}{17} = 7 \frac{1}{2}.$$

Toisin:

Edellisessä kohdassa muodostetut vektorit \vec{b} ja \vec{c} määräävät suunnikkaan, jonka

$$\text{pinta-ala on } |\vec{b} \times \vec{c}|. \text{ Ristitulovektori on } \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -10\vec{i} + 5\vec{j} - 10\vec{k},$$

$$\text{joten } |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{100 + 25 + 25} = 15. \text{ Kolmion ala on siis } A = \frac{1}{2} |\vec{b} \times \vec{c}| = 7 \frac{1}{2}.$$

Tason yhtälö

Taso kulkee pisteiden $A(2, 2, -1)$, $B(1, 1, 0)$ ja $C(3, -1, -1)$ kautta. Esitä tason yhtälö muodossa $ax + by + cz + d = 0$.

Ratkaisu:

Tason suuntavektoreiksi voidaan valita vektorit $\overrightarrow{AB} = -\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ ja $\overrightarrow{AC} = \bar{i} - 3\bar{j}$. Tason normaalivektori $\bar{n} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ on kohtisuorassa suuntavektoreita vastaan, joten vastaavat pistetulot ovat nollia. Saadaan yhtälöpari $-a - b + c = 0$ ja $a - 3b = 0$, josta $a = 3b$ ja $c = 4b$. Tällöin $\bar{n} = 3b\bar{i} + b\bar{j} + 4b\bar{k}$ ja normaalivektoriksi voidaan valita $3\bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k}$. Tason yhtälö on $3x + y + 4z + d = 0$. Sijoittamalla tähän esimerkiksi pisteen B koordinaatit saadaan $3 + 1 + d = 0$ eli $d = -4$. Haettu yhtälö on $3x + y + 4z - 4 = 0$.

Toisin:

Tason normaalivektoriksi voidaan ottaa $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 3\bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k}$.

Tason yhtälö on siis $3x + y + 4z + d = 0$. Sijoittamalla tähän esimerkiksi pisteen B koordinaatit saadaan $3 + 1 + d = 0$ eli $d = -4$. Tason yhtälöksi saadaan näin ollen $3x + y + 4z - 4 = 0$.

Suuntaissärmiön tilavuus

Laske sen suuntaissärmiön tilavuus, jonka kärkinä ovat origo O ja pisteet $A(2, 2, 0)$, $B(0, -1, 1)$ ja $C(-4, 0, 5)$.

Ratkaisu:

Paikkavektoreiden $\overrightarrow{OA} = \bar{a} = 2\bar{i} + 2\bar{j}$ ja $\overrightarrow{OB} = \bar{b} = -\bar{j} + \bar{k}$ välisen kulman kosini on $\cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$, joten $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Pohjana olevan suunnikkaan pinta-ala on $A = |\bar{a}| |\bar{b}| \sin \alpha = 2\sqrt{3}$. Pisteiden O , A ja B kautta kulkevan tason yhtälöksi saadaan $x - y - z = 0$. Pisteiden C etäisyys tästä tasosta on $h = \frac{|-4 - 0 - 5|}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$.

Suuntaissärmiön tilavuus on $V = Ah = 18$.

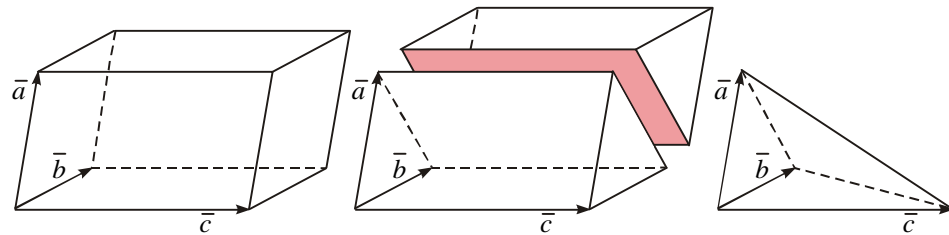
Toisin:

Muodostetaan paikkavektoreiden $\bar{a} = 2\bar{i} + 2\bar{j}$, $\bar{b} = -\bar{j} + \bar{k}$ ja $\bar{c} = -4\bar{i} + 5\bar{k}$ skalaarikolmitulo. Saadaan $\bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -18$. Suuntaissärmiön tilavuus on

siis $V = |\bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c}| = 18$.

Tetraedrin tilavuus

Samasta pisteestä alkavien vektoreiden \vec{a} , \vec{b} ja \vec{c} määräämän tetraedrin tilavuus saadaan laskemalla ensin vastaavan suuntaissärmiön tilavuus. Suuntaissärmiö voidaan jakaa vektorin \vec{c} suuntaisella \vec{a} :n ja \vec{b} :n kärkien kautta kulkevalla tasolla kahteen samanlaiseen kolmisivuiseen särmiöön. Vektoreiden \vec{a} , \vec{b} ja \vec{c} määräämän tetraedrin tilavuus on kolmasosa tällaisesta särmiöstä eli kuudesosa suuntaissärmiön tilavuudesta. Alla oleva kuva havainnollistaa asiaa.



Pisteen etäisyys avaruussuorasta

Laske pisteen $A(2, 4, 7)$ etäisyys pisteiden $B(1, 1, -2)$ ja $C(5, -5, 6)$ kautta kulkevasta suorasta.

Ratkaisu:

Kuvaan merkityt vektorit ovat

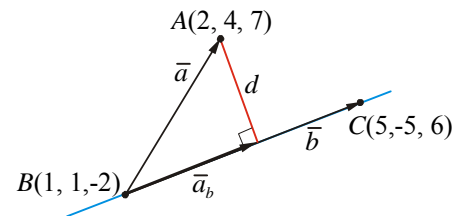
$\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} + 9\vec{k}$ ja $\vec{b} = 4\vec{i} - 6\vec{j} + 8\vec{k}$. Silloin

$$a_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{4 - 18 + 72}{\sqrt{116}} = \frac{58}{\sqrt{116}} = \frac{1}{2} \sqrt{116}.$$

Tämä on suorakulmaisen kolmion kateetin

pituus. Koska hypotenuusan pituus on $|\vec{a}| = \sqrt{91}$, on toisen kateetin pituus eli ky-

sytty etäisyys $d = \sqrt{91 - \frac{1}{4} \cdot 116} = \sqrt{62}$.



Toisin:

Ilmaistaan vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} määräämän suunnikkaan ala kahdella tavalla:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b}| \cdot d, \text{ josta } d = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{b}|}. \text{ Koska } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 9 \\ 4 & -6 & 8 \end{vmatrix} = 78\vec{i} + 28\vec{j} - 18\vec{k},$$

$$\text{niin } d = \frac{\sqrt{78^2 + 28^2 + (-18)^2}}{\sqrt{16 + 36 + 64}} = \sqrt{\frac{7192}{116}} = \sqrt{62}.$$

Tehtäviä

- Laske ristitulo $\vec{a} \times \vec{b}$.
 - $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$
 - $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$
 - $\vec{a} = \vec{i} + \vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + 2\vec{k}$
- Vektorit $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ ja $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ ovat suunnikkaan sivuina. Laske suunnikkaan pinta-ala.
- Kolmion kärkipisteet ovat $A(1, 3, 0)$, $B(-1, 2, 2)$ ja $C(2, 1, -2)$. Laske kolmion ABC pinta-ala.
- Tason suuntavektorit ovat $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ja $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$. Määritä jokin tason normaalivektori.
- Laske pisteen $A(2, -1, 3)$ etäisyys pisteiden $B(-1, 2, 3)$ ja $C(3, -2, 1)$ kautta kulkevasta suorasta.
- Laske skalaarikolmitulo $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$.
 - $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ ja $\vec{c} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$
 - $\vec{a} = -2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{k}$ ja $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
 - $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$ ja $\vec{c} = \vec{i} + \vec{k}$
- Tutki, ovatko vektorit \vec{a} , \vec{b} ja \vec{c} samassa tasossa, kun $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ ja $\vec{c} = -\vec{i} + \vec{j}$.
- Suuntaissärmiön pohjasärminä ovat vektorit $3\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$ ja $\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ sekä sivusärmänä vektori $4\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$. Määritä suuntaissärmiön **a)** tilavuus, **b)** korkeus.
- Tetraedrin särminä ovat samasta pisteestä alkavat vektorit $\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ ja $-\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$. Laske tetraedrin tilavuus.
- Tetraedrin kärkinä ovat pisteet $A(1, -2, -3)$, $B(2, -2, 0)$, $C(4, 0, -6)$ ja $D(5, -4, -2)$. Laske tetraedrin tilavuus.

Vastauksia:

- a)** $-3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ **b)** $-7\vec{i} - 10\vec{j} - 19\vec{k}$ **c)** $3\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ **2.** $\sqrt{66} \approx 8,12$
- 3.** $\frac{\sqrt{65}}{2} \approx 4,03$ **4.** esim. $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ **5.** $\sqrt{2}$ **6. a)** 8 **b)** -7 **c)** 2
- 7.** ovat **8. a)** 60 **b)** 4 **9.** $4\frac{1}{6}$ **10.** $7\frac{2}{3}$