

Calculus^{Lukion}

3

MAA5 VEKTORIT

Paavo Jäppinen

Alpo Kupiainen

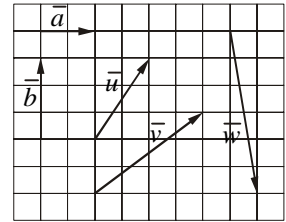
Matti Räsänen

Otava

**PIKATESTIN JA KERTAUSKOKEIDEN
TEHTÄVÄT RATKAISUINEEN**

Pikatesti (MAA5)

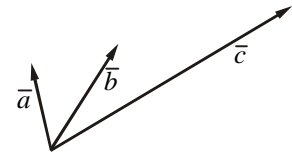
1. Lausu vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} avulla oheisen ruudukon vektorit \vec{u} , \vec{v} ja \vec{w} .



Ratkaisu:

$$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} \quad \vec{v} = 2\vec{a} + \vec{b} \quad \vec{w} = \frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b}$$

2. Oheisessa kuvassa vektori $\vec{c} = 3\vec{b} - 2\vec{a}$. Osoita, että vektoreiden kärjet ovat samalla suoralla.



Ratkaisu:

$\vec{c} = 3\vec{b} - 2\vec{a} = 2(\vec{b} - \vec{a}) + \vec{b}$, josta $\vec{c} - \vec{b} = 2(\vec{b} - \vec{a})$. Tämä osoittaa, että vektoreiden kärjet ovat samalla suoralla.

3. Jaa vektori $8\vec{i} + \vec{j}$ vektoreiden $\vec{i} + 2\vec{j}$ ja $-\vec{i} + \vec{j}$ suuntaisiin komponentteihin.

Ratkaisu:

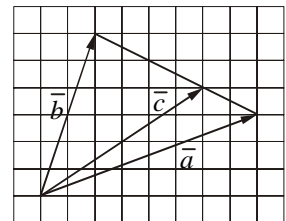
$8\vec{i} + \vec{j} = t(\vec{i} + 2\vec{j}) + s(-\vec{i} + \vec{j}) = (t - s)\vec{i} + (2t + s)\vec{j}$. Kertoimien vertailu antaa yhtälöparin $t - s = 8$ ja $2t + s = 1$, josta ratkeaa $t = 3$ ja $s = -5$. Komponenttiesitys on $8\vec{i} + \vec{j} = 3(\vec{i} + 2\vec{j}) - 5(-\vec{i} + \vec{j})$.

4. On annettu pisteet $A(-1, 2, 2)$, $B(0, 3, 4)$ ja $C(1, 1, 3)$. Laske vektoreiden \vec{AB} ja \vec{AC} välinen kulma.

Ratkaisu:

$\vec{AB} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ ja $\vec{AC} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, joten $\cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{2 - 1 + 2}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$. Vektoreiden välinen kulma on 60° .

5. Ilmaise oheisen ruudukkokuvan nojalla vektori \vec{c} vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} avulla.



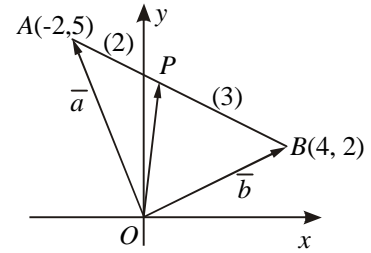
Ratkaisu:

Vektorin \vec{c} kärki jakaa vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} kärkien välisen janan suhteessa 1 : 2. Jakopistelauseen mukaan $\vec{c} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$

6. Määritä piste, joka jakaa janan $A(-2, 5)B(4, 2)$ suhteessa 2 : 3.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \text{Kuvan merkinnöin } \vec{OP} &= \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{5} = \frac{1}{5}(-6\vec{i} + 15\vec{j} + 8\vec{i} + 4\vec{j}) \\ &= \frac{2}{5}\vec{i} + \frac{19}{5}\vec{j}. \text{ Kysytty piste on } \left(\frac{2}{5}, 3\frac{4}{5}\right). \end{aligned}$$



7. Muunna suoran $\vec{r} = 2\vec{i} - \vec{j} + t(2\vec{i} + 3\vec{j})$, $t \in \mathbf{R}$, yhtälö normaalimuotoon $ax + by + c = 0$.

Ratkaisu:

Suoran $\vec{r} = 2\vec{i} - \vec{j} + t(2\vec{i} + 3\vec{j})$, $t \in \mathbf{R}$, suuntavektori on $2\vec{i} + 3\vec{j}$, joten suoran kulma-kerroin on $k = \frac{3}{2}$. Koska suora kulkee pisteen $(2, -1)$ kautta, suoran yhtälö on $y + 1 = \frac{3}{2}(x - 2)$, josta saadaan normaalimuoto $3x - 2y - 8 = 0$.

8. Missä pisteessä suora $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+2}{3}$ leikkaa yz -tason?

Ratkaisu:

Suoran $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+2}{3}$ ja yz -tason leikkauspisteessä $x = 0$. Silloin yhtälöstä määrätty $y = 8$ ja $z = -5$. Leikkauspiste on $(0, 8, -5)$.

9. Laske tasojen $x - 2y - 2z - 5 = 0$ ja $x + 2y - z - 2 = 0$ välinen kulma.

Ratkaisu:

Tasojen $x - 2y - 2z - 5 = 0$ ja $x + 2y - z - 2 = 0$ välinen kulma saadaan selville laskeamalla niiden normaalivektoreiden $\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$ ja $\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ välinen kulma. Se saadaan yhtälöstä $\cos \alpha = \frac{1 - 4 + 2}{3\sqrt{6}} = \frac{-1}{3\sqrt{6}}$, josta $\alpha \approx 97,8^\circ$. Tasojen välinen kulma on tämän supplementtikulma $82,2^\circ$.

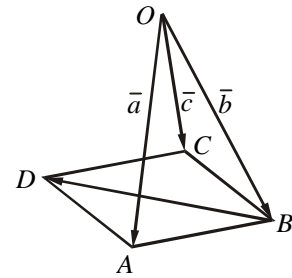
10. Osoita, että suora $x = 4 - 2t$, $y = 6 - t$, $z = -2 + 3t$ ($t \in \mathbf{R}$) on tason $6x + 3y - 9z - 2 = 0$ normaali.

Ratkaisu:

Suoran $x = 4 - 2t$, $y = 6 - t$, $z = -2 + 3t$ ($t \in \mathbf{R}$) suuntavektori $-2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ on yhdensuuntainen tason $6x + 3y - 9z - 2 = 0$ normaalivektorin $6\vec{i} + 3\vec{j} - 9\vec{k}$ kanssa, joten suora on tason normaali.

Kertauskoe 1 (MAA5)

1. Oheisen kuvan nelikulmio $ABCD$ on suunnikas. Lausu vektori \vec{BD} vektoreiden \vec{a} , \vec{b} ja \vec{c} avulla.



Ratkaisu:

$$\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{BC} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} - \vec{b} = \vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$$

2. Jaa vektori $6\vec{i} - 7\vec{j}$ vektoreiden $2\vec{i} + \vec{j}$ ja $-\vec{i} - 3\vec{j}$ suuntaisiin komponentteihin.

Ratkaisu:

$6\vec{i} - 7\vec{j} = t(2\vec{i} + \vec{j}) + s(-\vec{i} - 3\vec{j})$. Kantavektoreiden kertoimien vertailu antaa ehdot $2t - s = 6$ ja $t - 3s = -7$, joista ratkeaa $t = 5$ ja $s = 4$. Komponenttiesitys on $6\vec{i} - 7\vec{j} = 5(2\vec{i} + \vec{j}) + 4(-\vec{i} - 3\vec{j})$.

3. a) Mitä vaatimuksia tulee asettaa tason kantavektoreille?
b) Millä t :n arvolla vektorit $\vec{i} - 2\vec{j}$ ja $3\vec{i} + t\vec{j}$ eivät sovi tason kantavektoreiksi?

Ratkaisu:

a) Tason kantavektoreilta vaaditaan, että niitä on kaksi ja ne ovat aitoja erisuuntaisia vektoreita.

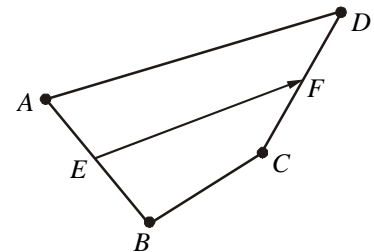
b) Vektorit $\vec{i} - 2\vec{j}$ ja $3\vec{i} + t\vec{j}$ eivät sovi tason kantavektoreiksi, jos ne ovat yhdensuuntaisia eli jos on sellainen luku s , että $3\vec{i} + t\vec{j} = s(\vec{i} - 2\vec{j})$. Kertoimien vertailu antaa $3 = s$ ja $t = -2s$. Saadaan $t = -6$.

4. Määritä sen tason yhtälö, joka on tason $x + 2y - 2z - 6 = 0$ suuntainen ja kulkee pisteen $(1, 1, 2)$ kautta. Mikä on näiden tasojen välinen etäisyys?

Ratkaisu:

Tason $x + 2y - 2z - 6 = 0$ suuntaisen tason yhtälö on muotoa $x + 2y - 2z + d = 0$. Koska taso kulkee pisteen $(1, 1, 2)$ kautta, tulee olla $d = 1$. Kysytty tason yhtälö on $x + 2y - 2z + 1 = 0$. Tämän tason tunnettu piste on $(1, 1, 2)$. Sen etäisyys toisesta tasosta on $d = \frac{|1 + 2 - 4 - 6|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{7}{3}$. Tasojen välimatka on siis $2\frac{1}{3}$.

5. Oheisen kuvan pisteet A, B, C ja D ovat avaruuden neljä pistettä ja E ja F ovat vastaavien janojen keskipisteet. Osoita, että $\vec{EF} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BC})$.



Ratkaisu:

Kiertämällä eri kautta saadaan vektoryhtälöt

$$\begin{aligned}\vec{EF} &= \vec{EA} + \vec{AD} + \vec{DF} \\ \vec{EF} &= \vec{EB} + \vec{BC} + \vec{CF}\end{aligned}$$

Kun yhtälöt lasketaan puolittain yhteen, vastavektorit kumoavat toisensa ja päädytään tulokseen $\vec{EF} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BC})$.

6. Pisteiden $A(3, -2, 0)$ ja $B(-1, 2, 4)$ kautta kulkeva suora ja pisteiden $C(0, 1, -1)$ ja $D(5, -4, 4)$ kautta kulkeva suora leikkaavat toisensa.
a) Laske suorien leikkauspiste.
b) Laske suorien välinen kulma.

Ratkaisu:

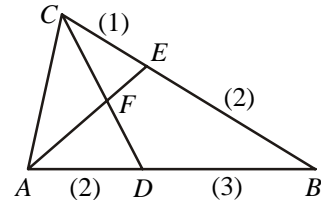
a) Suoran AB suuntavektori on $\vec{s}_{AB} = -4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$ ja suoralla on parametriesitys $x = 3 - 4t, y = -2 + 4t, z = 4t, t \in \mathbf{R}$. Vastaavasti suoran CD suuntavektori on $\vec{s}_{CD} = 5\vec{i} - 5\vec{j} + 5\vec{k}$ ja parametriesitys $x = 5s, y = 1 - 5s, z = -1 + 5s, s \in \mathbf{R}$. Yhteis-

sessä pisteessä toteutuu yhtälöryhmä
$$\begin{cases} 3 - 4t = 5s \\ -2 + 4t = 1 - 5s \\ 4t = -1 + 5s. \end{cases}$$
 Sen toteuttavat parametrit

$t = \frac{1}{4}$ ja $s = \frac{2}{5}$. Yhteiseksi pisteeksi tulee $(2, -1, 1)$.

b) Lasketaan suuntavektoreiden välinen kulma: $\cos \alpha = \frac{-20 - 20 + 20}{4\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}$, josta $\alpha \approx 109,5^\circ$. Suorien välinen kulma on noin $70,5^\circ$.

7. Oheisen kuvan kolmiossa on $AD : DB = 2 : 3$ ja $BE : EC = 2 : 1$. Missä suhteessa piste F jakaa
a) janan AE , **b)** janan CD ?



Ratkaisu:

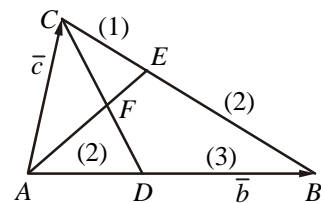
Jakopistelauseen nojalla $\vec{AE} = \frac{\vec{b} + 2\vec{c}}{3}$. Edelleen $\vec{CD} = \frac{2}{5}\vec{b} - \vec{c}$. Kolmiosta AFC saa-

daan vektoryhtälö $\vec{CF} = \vec{AF} - \vec{AC}$ eli $s\vec{CD} = t\vec{AE} - \vec{AC}$. Sijoitus ja ryhmittely antaa yhtälön

$\frac{2s}{5}\vec{b} - s\vec{c} = \frac{t}{3}\vec{b} + (\frac{2t}{3} - 1)\vec{c}$. Kertoimien vertailusta syntyy

kaksi yhtälöä, $\frac{2s}{5} = \frac{t}{3}$ ja $-s = \frac{2t}{3} - 1$. Niiden ratkaisut ovat

$t = \frac{2}{3}$ ja $s = \frac{5}{9}$. Tämän nojalla saadaan tulokset.



- a)** Piste F jakaa janan AE suhteessa $2 : 1$. **b)** Piste F jakaa janan CD suhteessa $5 : 4$.

8. Osoita, että suorat $L_1: x = -5 + t, y = t, z = 2 + t$ ja $L_2: x = 2 + t, y = 4 - 2t, z = 2t$, $t \in \mathbf{R}$, ovat ristikkäiset. Määritä yhtälö tasolle, joka sisältää suoran L_1 ja on yhdensuuntainen suoran L_2 kanssa.

Ratkaisu:

Suorien $L_1: x = -5 + t, y = t, z = 2 + t$ ja $L_2: x = 2 + t, y = 4 - 2t, z = 2t$ suuntavektorit ovat $\vec{s}_1 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ja $\vec{s}_2 = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, joten suorat ovat erisuuntaiset. Tutkitaan, on-

ko suorilla yhteistä pistettä eli toteutuuko yhtälöryhmä
$$\begin{cases} -5 + t = 2 + s \\ t = 4 - 2s \\ 2 + t = 2s \end{cases}$$
 joillakin pa-

rametrien t ja s arvoilla. Helposti nähdään, että ratkaisua ei ole. Erisuuntaisilla suorilla ei siis ole yhteistä pistettä, joten ne ovat ristikkäiset.

Olkoon tason normaalivektori $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. Kun taso sisältää suoran L_1 , on $\vec{n} \cdot \vec{s}_1 = 0$, ja koska taso on L_2 :n suuntainen, on myös $\vec{n} \cdot \vec{s}_2 = 0$. Saadaan yhtälöpari $a + b + c = 0$ ja $a - 2b + 2c = 0$. Näistä $a = -4b$ ja $c = 3b$. Normaalivektoriksi voidaan valita $\vec{n} = 4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$, joten tason yhtälö on muotoa $4x - y - 3z + d = 0$. Koska L_1 :n piste $(-5, 0, 2)$ on tasossa, on $d = 26$. Tason yhtälö on $4x - y - 3z + 26 = 0$.

Kertauskoe 2 (MAA5)

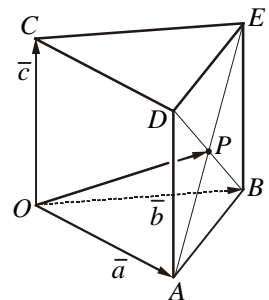
1. Määritä yksikkövektori, joka on samansuuntainen pisteen $(7, -4, -4)$ paikkavektorin kanssa.

Ratkaisu:

Pisteen $(7, -4, -4)$ paikkavektorin $\vec{a} = 7\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$ kanssa samansuuntainen yksik-

kövektori on $\vec{a}^o = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{7}{9}\vec{i} - \frac{4}{9}\vec{j} - \frac{4}{9}\vec{k}$.

2. Oheinen piirros esittää kolmisivuista prismaa $OABCDE$. Sen pohjat ovat yhtenevät ja yhdensuuntaiset. Särmävektorit \vec{a} , \vec{b} ja \vec{c} on valittu kuvan osoittamalla tavalla, ja piste P on sivutahkon $ABED$ lävistäjien leikkauspiste. Lausu vektori \vec{OP} vektoreita \vec{a} , \vec{b} ja \vec{c} käyttäen.



Ratkaisu:

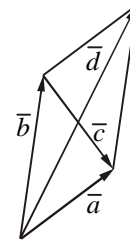
\vec{OP} saadaan lisäämällä pohjatahkon mediaanivektoriin vektori $\frac{1}{2}\vec{c}$ eli

$$\vec{OP} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

3. Suunnikkaan yhtenä sivuna on vektori $4\bar{i} + 3\bar{j}$ ja toisena lävistäjänä samasta pisteestä alkava vektori $5\bar{i} + 10\bar{j}$. Laske suunnikkaan lyhyemmän lävistäjän pituus.

Ratkaisu:

Jos suunnikkaan sivuvektorit ovat kuvan mukaisesti $\bar{a} = 4\bar{i} + 3\bar{j}$ ja \bar{b} , lävistäjänä on vektori $\bar{d} = 5\bar{i} + 10\bar{j} = \bar{a} + \bar{b}$. Silloin $\bar{b} = \bar{i} + 7\bar{j}$ ja toinen lävistäjä $\bar{a} - \bar{b} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$. Se on lyhyempi lävistäjä ja sen pituus on 5.

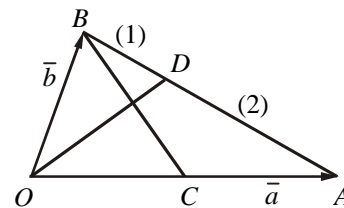


4. Laske vektorin $2\bar{a} + 3\bar{b}$ pituus, kun $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$ ja $\angle(\bar{a}, \bar{b}) = 120^\circ$.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} |2\bar{a} + 3\bar{b}| &= \sqrt{(2\bar{a} + 3\bar{b})^2} = \sqrt{4\bar{a}^2 + 12\bar{a} \cdot \bar{b} + 9\bar{b}^2} \\ &= \sqrt{4 \cdot |\bar{a}|^2 + 12|\bar{a}||\bar{b}|\cos(\bar{a}, \bar{b}) + 9|\bar{b}|^2} = \sqrt{4 \cdot 4 + 12 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-\frac{1}{2}) + 9 \cdot 9} = \sqrt{61} \end{aligned}$$

5. Kolmiossa OAB on $\vec{OA} = \bar{a}$, $\vec{OB} = \bar{b}$, $|\bar{a}| = 2|\bar{b}|$, piste C on sivun OA keskipiste ja piste D jakaa janan AB suhteessa 2 : 1. Osoita, että OD on kohtisuorassa BC :tä vastaan.



Ratkaisu:

Oletuksista seuraa, että $\vec{BC} = \frac{1}{2}\bar{a} - \bar{b}$ ja $\vec{OD} = \frac{\bar{a} + 2\bar{b}}{3}$. Silloin

$$\begin{aligned} \vec{BC} \cdot \vec{OD} &= (\frac{1}{2}\bar{a} - \bar{b}) \cdot \frac{1}{3}(\bar{a} + 2\bar{b}) \\ &= \frac{1}{3}(\frac{1}{2}\bar{a}^2 + \bar{a} \cdot \bar{b} - \bar{b} \cdot \bar{a} - 2\bar{b}^2) \\ &= \frac{1}{3}(\frac{1}{2}|\bar{a}|^2 - 2|\bar{b}|^2) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} \cdot 4|\bar{b}|^2 - 2|\bar{b}|^2) = 0. \end{aligned}$$

Saatu tulos merkitsee, että OD on kohtisuorassa BC :tä vastaan.

6. Osoita, että suorat $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = z-3$ ja $\frac{x-4}{-3} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z+2}{2}$ leikkaavat toisensa ja laske suorien välinen kulma.

Ratkaisu:

Suorien $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = z-3$ ja $\frac{x-4}{-3} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z+2}{2}$ suuntavektorit ovat

$-\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$ ja $-3\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$. Koska ne eivät ole yhdensuuntaisia, suorat leikkaavat toisensa tai ovat ristikkäiset. Suorien parametriesitykset ovat $x = -2 - t$, $y = 1 + 2t$, $z = 3 + t$, $t \in \mathbf{R}$; $x = 4 - 3s$, $y = 1 - 6s$, $z = -2 + 2s$, $s \in \mathbf{R}$. Jos suorilla on yhteinen

$$\text{piste, yhtälöryhmä } \begin{cases} -2 - t = 4 - 3s \\ 1 + 2t = 1 - 6s \\ 3 + t = -2 + 2s \end{cases} \text{ toteutuu jollakin parametriparilla } t, s. \text{ Näin}$$

käy, kun $t = -3$ ja $s = 1$. Siis suorat leikkaavat toisensa.

Lasketaan suuntavektoreiden välinen kulma: $\cos \alpha = \frac{3 - 12 + 2}{\sqrt{6} \cdot 7} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, josta $\alpha \approx 114,1^\circ$. Suorien välinen kulma on noin $65,9^\circ$.

7. Mikä tason $2x - y - 3z + 7 = 0$ piste on lähinnä pistettä $(3, 2, -1)$? Laske tämä lyhin välimatka.

Ratkaisu:

Tason $2x - y - 3z + 7 = 0$ piste, joka on lähinnä pistettä $(3, 2, -1)$, on tämän pisteen kautta kulkevan tason normaalin ja tason leikkauspiste. Kyseisen suoran suuntavektori on tason normaalivektori $2\bar{i} - \bar{j} - 3\bar{k}$. Koska suora kulkee pisteen $(3, 2, -1)$ kautta suoran parametriesitys on $x = 3 + 2t, y = 2 - t, z = -1 - 3t, t \in \mathbf{R}$. Sijoitus tason yhtälöön antaa $2(3 + 2t) - (2 - t) - 3(-1 - 3t) + 7 = 0$, josta $t = -1$. Pisteeksi saadaan $(1, 3, 2)$.

Lyhin välimatka on $\sqrt{(3-1)^2 + (2-3)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{14} \approx 3,7$.

8. Kuution muotoinen rakennus on vaakasuoralla maalla. Ajatellaan koordinaatisto sijoitetuksi niin, että kuution kolme särmää on positiivisilla koordinaattiakseleilla ja maanpintaa edustaa xy -taso. Auringon säteiden suunta tietyllä hetkellä on $\bar{s} = \bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$. Määritä rakennuksen varjon muoto, kun kuution särmä on 5,0 m.

Ratkaisu:

Pisteen $(5, 0, 5)$ kautta kulkeva valonsäde on suora $x = 5 + t, y = 2t, z = 5 - 2t, t \in \mathbf{R}$. Kun asetetaan $z = 0$, saadaan $t = 2\frac{1}{2}$. Silloin $x = 7\frac{1}{2}$ ja $y = 5$. Tuloksena on piste $(7\frac{1}{2}, 5, 0)$. Vastaavasti kärjen $(5, 5, 5)$ kautta kulkevalle suoralle saadaan xy -tason pisteeksi $(7\frac{1}{2}, 10, 0)$. Kärjen $(0, 5, 5)$ kautta kulkeva suora puolestaan leikkaa xy -tason pisteessä $(2\frac{1}{2}, 10, 0)$. Nämä kolme pistettä yhdessä pisteiden $(5, 0, 0)$, $(5, 5, 0)$ ja $(0, 5, 0)$ kanssa määräävät kuvaan piirretyn varjomonikulmion.

