Lukion

Calculus

1

MAA2 Polynomifunktiot

Paavo Jäppinen
Alpo Kupiainen
Matti Räsänen

Otava

MITEN RATKAISEN POLYNOMIYHTÄLÖITÄ?

Polynomiyhtälön ratkaiseminen

Eri lajin yhtälöiden ratkaisutavat poikkeavat toisistaan. Siksi on tärkeää tunnistaa yhtälötyyppi. Polynomiyhtälö on yhtälö, joka voidaan esittää muodossa $P(x) = 0$. Tässä $P(x)$ on muuttujan x polynomi eli sellainen summa, jonka yhteenlaskettavat eli termit ovat muotoa ax^n. Termin kerroin a on reaaliluku ja eksponentti n luonnollinen luku eli $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Ensimmäisen asteen yhtälö

Ensimmäisen asteen yhtälö on muotoa $ax + b = 0$. Sitä sanotaan myös lineaariseksi yhtälöksi, koska siihen liittyvä yhtälö $y = ax + b$ esittää suoraa. Yhtälön ratkaisu on $x = -\frac{b}{a}$. Koordinaatistossa se on suoran $y = ax + b$ ja x-akselin leikkauskohta.

Esimerkki 1

a) Ratkaise yhtälö $\frac{x}{3} + \frac{1}{2} = 0$.

b) Määritä suoran $y = -\frac{1}{3}x + 2$ ja x-akselin leikkauspiste.

Ratkaisu:

a) Kerrotaan yhtälö $\frac{x}{3} + \frac{1}{2} = 0$ luvulla 6, jolloin saadaan $2x + 3 = 0$. Siitä $2x = -3$ ja $x = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$.

b) Suoran ja x-akselin leikkauspisteessä on $y = 0$ eli nyt $-\frac{1}{3}x + 2 = 0$. Kerrotaan yhtälö luvulla 3, jolloin saadaan $-x + 6 = 0$ ja siitä $x = 6$. Haettu leikkauspiste on (6, 0).

Toisen asteen yhtälö

Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ juuret voidaan laskea ratkaisukaavalla $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Vaillinaiset yhtälöt $ax^2 = 0$, $ax^2 + bx = 0$ ja $ax^2 + c = 0$ ratkeavat helpommin ilman ratkaisukaavaa. Ratkaisujen lukumäärä riippuu diskriminantin $D = b^2 - 4ac$ arvosta seuraavalla tavalla:

- Jos $D > 0$, yhtälöllä on kaksi eri suurta reaalijuurta $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.
- Jos $D = 0$, yhtälöllä on yksi juuri, ns. kaksoisjuuri $x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$.
- Jos $D < 0$, yhtälöllä ei ole reaalisia juuria.

Laskemalla nähdään, että juurien x_1 ja x_2 summa on $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ja tulo $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Kun tunnetaan toisen asteen yhtälö $ax^2 + bx + c = 0$ juuret eli polynomin $ax^2 + bx + c$ nollakohdat, kyseinen polynomi voidaan jakaa tekijöihin seuraavan lauseen esittämällä tavalla.

Jos x_1 ja x_2 ovat polynomin $ax^2 + bx + c$ nollakohdat, niin

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Lause on johdettu kurssissa MAA2 ja se tarjoaa kätevän keinon jakaa toisen asteen polynomi tekijöihin. Jos toisaalta tiedetään, että esimerkiksi $x - t$ on polynomin $ax^2 + bx + c$ tekijä eli jos $ax^2 + bx + c = (x - t)Q(x)$, nähdään suoraan, että luku t on polynomin $ax^2 + bx + c$ nollakohta. Nimittäin, kun $x = t$, niin $ax^2 + bx + c = 0$.

Nämä tulokset voidaan yleistää koskemaan mitä tahansa polynomia eli on voimassa seuraava lause:

Tekijälause

Luku a on polynomin $P(x)$ nollakohta tarkalleen silloin, kun $P(x)$ on jaollinen $(x - a)$:lla.

Tekijälause sisältää kaksi toisilleen käänteistä lausetta:

1. Jos luku a on polynomin $P(x)$ nollakohta, niin $P(x)$ on jaollinen $(x - a)$:lla.

2. Jos $P(x)$ on jaollinen $(x - a)$:lla, niin luku a on polynomin $P(x)$ nollakohta.

Lauseista edellinen perustellaan kurssissa MAA12. Jälkimmäinen seuraa suoraan siitä, että jos $x - a$ on $P(x)$:n tekijä, niin $P(x) = (x - a)Q(x)$, jolloin $P(a) = 0$.

Jos $x_1, x_2, ..., x_k$ ovat polynomin $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ nollakohtia, niin polynomi on jaollinen jokaisella erotuksella $x - x_1$, $x - x_2$, …, $x - x_k$ ja näin ollen myös tulolla $(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_k)$. Koska polynomin asteluku on n, ei sanotun tulon tekijöitäkään voi olla enempää. Saadaan seuraavat samansisältöiset tulokset:

Astetta n olevalla polynomilla on enintään n nollakohtaa.

Astetta n olevalla polynomiyhtälöllä on enintään n juurta.

Esimerkki 2

Ratkaise yhtälö. **a)** $x(2x-1)=0$ **b)** $x(2x-1)=1$ **c)** $x(2x-1)=-1$

Ratkaisu:

a) Kun $x(2x-1)=0$, on tulon nollasäännön mukaan $x = 0$ tai $2x-1=0$. Ratkaisuksi saadaan $x = 0$ tai $x=\frac{1}{2}$.

b) Yhtälö $x(2x-1)=1$ kirjoitetaan ensin muotoon $2x^2-x=1$ ja edelleen $2x^2-x-1=0$. Ratkaisukaavan mukaan $x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot 2\cdot(-1)}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{4}$ $=\frac{1\pm 3}{4}$, josta $x=\frac{4}{4}=1$ tai $x=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$.

c) Yhtälö $x(2x-1)=-1$ saatetaan normaalimuotoon $2x^2-x+1=0$. Koska diskriminantti $D=(-1)^2-4\cdot 2\cdot 1=-7<0$, yhtälöllä ei ole (reaalisia) ratkaisuja.

Vastaus: **a)** $x = 0$ tai $x=\frac{1}{2}$ **b)** $x = 1$ tai $x=-\frac{1}{2}$ **c)** ei ratkaisuja

Esimerkki 3

Jaa tekijöihin. **a)** $3x^2+5x-2$ **b)** $9x^2-12x+4$ **c)** x^2-4x+5

Ratkaisu:

Ratkaistaan nollakohdat.

a) $3x^2+5x-2\ =0$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\cdot 3\cdot(-2)}}{6}=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{6}=\frac{-5\pm 7}{6}$$

$$x=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\ \text{tai}\ x=\frac{-12}{6}=-2$$

Tällöin $3x^2+5x-2=3(x-\frac{1}{3})(x+2)=(3x-1)(x+2)$

b) $9x^2-12x+4\ =0$

$$x=\frac{12\pm\sqrt{144-4\cdot 9\cdot 4}}{18}=\frac{12\pm\sqrt{0}}{18}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$$

Polynomilla on kaksikertaisena nollakohtana $\frac{2}{3}$, joten

$$9x^2-12x+4=9(x-\frac{2}{3})(x-\frac{2}{3})=3(x-\frac{2}{3})\cdot 3(x-\frac{2}{3})$$
$$=(3x-2)(3x-2)=(3x-2)^2.$$

Huomautus:

Tulos saataisiin suoraan kaavaa $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ soveltamalla.

c) $x^2 - 4x + 5 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Huomataan, että reaalisia nollakohtia ei ole, koska diskriminantti $D = -4 < 0$.
Siksi $x^2 - 4x + 5$ ei jakaudu reaalisiin ensimmäisen asteen tekijöihin.

Huomautus:
Kompleksilukualueella voitaisiin menetellä seuraavasti:

$x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$, jolloin $x^2 - 4x + 5 = (x - 2 - i)(x - 2 + i)$.

Tämä tekijöihin jakotapa ei kuulu lukiokurssien keskeiseen sisältöön.

Vastaus: **a)** $(3x - 1)(x + 2)$ **b)** $(3x - 2)^2$ **c)** ei jakaudu tekijöihin

Esimerkki 4

Millä vakion k arvolla polynomi $2x^2 - 3kx + k^2$ on jaollinen $(x + 3)$:lla?

Ratkaisu:
Polynomi on jaollinen $(x + 3)$:lla eli $(x - (-3))$:lla, mikäli polynomin nollakohtana on –3. Tällöin annetulle polynomille $2 \cdot (-3)^2 - 3k \cdot (-3) + k^2 = 0$ eli sievennettynä $k^2 + 9k + 18 = 0$. Ratkaisukaavan mukaan $k = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 1 \cdot 18}}{2}$ $= \frac{-9 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-9 \pm 3}{2}$. Vastaukseksi saadaan kaksi k:n arvoa: $k = -6$ tai $k = -3$.

Korkeamman asteen yhtälö

Korkeamman asteen yhtälöllä tarkoitetaan polynomiyhtälöä, jonka asteluku on vähintään kolme. Nämä yhtälöt ratkaistaan usein niin, että polynomi jaetaan tekijöihin ja käytetään sen jälkeen tulon nollasääntöä. Erikoistapauksissa voidaan käyttää myös muita menetelmiä.

Esimerkki 5

Ratkaise yhtälö. **a)** $x^3 - 2x = 2x^2$ **b)** $x^4 - x^2 = 6$ **c)** $x^3 - 6x^2 = 2x - 12$

Ratkaisu:
a) Termejä siirtämällä saadaan $x^3 - 2x^2 - 2x = 0$ ja siitä $x(x^2 - 2x - 2) = 0$.
Tulon nollasäännön mukaan $x = 0$ tai $x^2 - 2x - 2 = 0$. Jälkimmäisestä saadaan ratkaisukaavalla $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$. Yhtälön ratkaisu on $x = 0$ tai $x = 1 \pm \sqrt{3}$.

b) Termin siirrolla saadaan $x^4 - x^2 - 6 = 0$. Yhtälö on tyypiltään *bikvadraattinen* ja voidaan ratkaista toisen asteen yhtälön tapaan. Merkitään $x^2 = y$ jolloin $y^2 - y - 6 = 0$. Siitä $y = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$. Näin ollen $y = x^2 = 3$ tai $y = x^2 = -2$. Jälkimmäisellä yhtälöllä ei ole ratkaisuja, joten kaikki ratkaisut ovat $x = \pm\sqrt{3}$.

c) Termejä siirtämällä saadaan $x^3 - 6x^2 - 2x + 12 = 0$. Erotetaan kahdesta ensimmäisestä termistä yhteinen tekijä x^2 ja kahdesta viimeisestä –2. Tällöin $x^2(x-6) - 2(x-6) = 0$. Nyt voidaan erottaa yhteiseksi tekijäksi $x - 6$. Tällöin saadaan tulomuoto $(x-6)(x^2 - 2) = 0$. Tulon nollasäännön mukaan $x - 6 = 0$ tai $x^2 - 2 = 0$. Näistä nähdään helposti ratkaisu $x = 6$ tai $x = \pm\sqrt{2}$.

Esimerkki 6

Osoita, että polynomi $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 1$ on jaollinen binomilla $2x - 1$.

Ratkaisu:

Koska $2x - 1 = 2(x - \frac{1}{2})$, niin polynomi $P(x)$ on jaollinen binomilla $2x - 1$, jos se on jaollinen myös binomilla $x - \frac{1}{2}$. Tämä pätee puolestaan edellytyksellä, että luku $\frac{1}{2}$ on polynomin $P(x)$ nollakohta. Koska

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{2}{8} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{2}{8} - \frac{6}{8} - \frac{4}{8} + \frac{8}{8} = 0,$$

niin $P(x)$ on jaollinen binomilla $x - \frac{1}{2}$ ja siis myös binomilla $2x - 1$.

Jakoalgoritmi

Polynomin saattaminen tulon muotoon yhtälön ratkaisemista varten edellyttää joskus jakamista jakokulmassa eli jakoalgoritmin käyttöä. Sitä valaisee seuraava esimerkki. Jakoalgoritmi on täydentävää oppiainesta, ja sen soveltaminen keskittyy syventävään kurssiin MAA12.

Esimerkki 7

Jaa polynomi $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ jakokulmassa binomilla $x - 2$.

Ratkaisu:

Koska $P(2) = 8 - 12 + 4 = 0$, niin $P(x)$ on jaollinen $(x - 2)$:lla. Suoritus jakokulmassa näyttää seuraavalta:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - x - 2 \\
\hline
x-2 & x^3 - 3x^2 \qquad + 4 \\
 & \underline{\mp x^3 \pm 2x^2} \\
 & \quad - x^2 \\
 & \quad \underline{\pm x^2 \mp 2x} \\
 & \qquad - 2x + 4 \\
 & \qquad \underline{\pm 2x \mp 4} \\
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

Osamäärä on $x^2 - x - 2$.

Jakoalgoritmin vaiheet ovat seuraavat:

1. Jaettava ja jakaja järjestetään alenevien potenssien mukaiseen järjestykseen. Jaettavassa voidaan jättää tyhjä tila puuttuvaa astelukua olevan termin kohdalle.

2. Osamäärän ensimmäinen termi saadaan jakamalla jaettavan ensimmäinen termi jakajan ensimmäisellä termillä. Siis $x^3 : x = x^2$.

3. Saadulla osamäärän termillä kerrotaan jakaja $x - 2$ ja tulos $x^3 - 2x^2$ vähennetään jaettavan vastaavista termeistä. Vähennyslasku kannattaa muuntaa yhteenlaskuksi, jolloin vähentäjän etumerkit on muutettava.

4. Jaettavaksi otetaan saatu erotus $-x^2$ täydennettynä lopuilla alkuperäisen jaettavan termeillä Yleensä näitä "pudotetaan" käsittelyyn vain, jos vastaavan korkuinen termi muodostuu seuraavassa kertomisvaiheessa.

5. Osamäärän toinen termi löytyy kuten ensimmäinenkin. Menettelyä jatketaan, kunnes jaettavan asteluku on pienempi kuin jakajan. Jakojäännös ratkaisee, meneekö jako tasan.

Kun tavalla tai toisella löydetään korkeamman asteen yhtälön $P(x) = 0$ yksi juuri, voidaan polynomi $P(x)$ jakaa tekijöihin. Juuri voidaan löytää pelkästään kokeilemalla, mutta sen etsiminen helpottuu, jos pystytään rajaamaan juuriehdokkaiden määrää. Kun yhtälön kertoimet ovat kokonaislukuja, voidaan käyttää seuraavaa lausetta. Lause todistetaan kurssissa MAA12.

Jos kokonaiskertoimisella polynomiyhtälöllä on rationaalijuuri $\frac{p}{q}$ (supistettu), niin p on vakiotermin ja q korkeinta astetta olevan termin kertoimen tekijä.

Esimerkki 8

Esitä yhtälön $3x^3 - 4x^2 + 7x - 2 = 0$ kaikki rationaaliset juuriehdokkaat ja tutki, onko niiden joukossa yhtälön juuria.

Ratkaisu:
Yhtälön kertoimet ovat kokonaislukuja. Jos yhtälön juurena on supistettu rationaaliluku $\frac{p}{q}$, saadaan seuraavat mahdollisuudet: $p = \pm 1, \pm 2$ ja $q = \pm 1, \pm 3$.

Näiden perusteella $\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}$. Rationaalisia juuriehdokkaita on siis kahdeksan. Kun jokainen kokeillaan erikseen, huomataan, että yhtälön ainoa rationaalijuuri on $x = \frac{1}{3}$.

Esimerkki 9

a) Osoita, että yhtälöllä $x^3 - 5x - 3 = 0$ ei ole rationaalijuuria.
b) Ratkaise yhtälö $x^3 - 5x - 2 = 0$.

Ratkaisu:
a) Yhtälö $x^3 - 5x - 3 = 0$ on kokonaiskertoiminen. Jos sillä on juurena (supistettu) rationaaliluku $\frac{p}{q}$, niin $p = \pm 1, \pm 3$ ja $q = \pm 1$, joten $\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 3$. Mikään näistä ehdokkaista ei ole yhtälön juuri (totea!), joten yhtälöllä ei ole rationaalijuuria.

b) Yhtälön $x^3 - 5x - 2 = 0$ mahdolliset rationaalijuuret ovat $\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2$.

Huomataan, että $(-2)^3 - 5 \cdot (-2) - 2 = -8 + 10 - 2 = 0$, joten yksi juuri on $x = -2$. Polynomi on silloin jaollinen (x + 2):lla.

$$
\begin{array}{r|llll}
 & x^2 & -2x & -1 & \\
\hline
x+2 & x^3 & & -5x & -2 \\
 & \underline{\mp x^3 \mp 2x^2} & & & \\
 & & -2x^2 & -5x & \\
 & & \underline{\pm 2x^2 \pm 4x} & & \\
 & & & -x-2 & \\
 & & & \underline{\pm x \pm 2} & \\
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Jakolaskun tuloksena
$x^3 - 5x - 2 = (x+2)(x^2 - 2x - 1)$.

Merkitään $x^2 - 2x - 1 = 0$, jolloin

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Vastaus: $x = -2$ tai $x = 1 \pm \sqrt{2}$

Laskimen käyttö

Nykyaikaisissa laskimissa on monipuolisia toimintoja, jotka ovat avuksi yhtälöitä ratkaistaessa. Niitä kannattaa ilman muuta käyttää ainakin laskemalla saatujen ratkaisujen tarkistamisessa.

Polynomiyhtälöistä toisen ja kolmannen asteen yhtälöt ratkeavat yleensä suoraan näppäilemällä laskimeen yhtälössä $P(x) = 0$ esiintyvän polynomin kertoimet. Ratkaiseminen voidaan toteuttaa myös graafisesti määrittämällä polynomifunktion P nollakohdat. Grafiikkanäytölle piirretyn käyrän avulla saadaan usein riittävä yleiskäsitys juurten sijainnista, ja koordinaatiston mittakaavaa muuttamalla voidaan päästä tarkempiin juuren likiarvoihin.

Esimerkki 10

a) Ratkaise laskimen avulla yhtälö $x^3 - 5x - 2 = 0$.

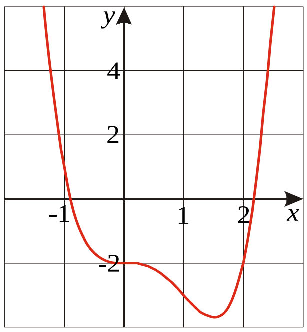
b) Yhtälöllä $x^4 - 2x^3 - 2 = 0$ on tarkalleen kaksi reaalijuurta. Määritä laskimella niiden nelidesimaaliset likiarvot.

Ratkaisu:

a) Siirrytään laskimessa kolmannen asteen polynomiyhtälöiden ratkaisuvalmiuteen ja syötetään järjestyksessä termien kertoimet 1, 0, –5 ja –2. Huomaa, että puuttuvaa astelukua vastaavan termin kertoimeksi syötetään 0.

Laskin antaa likiarvotulokset –2, –0,414214 ja 2,414214. Näistä ensimmäinen voidaan sijoittamalla todeta tarkaksi arvoksi. Sen jälkeen voidaan tarkkojen arvojen saamiseksi menetellä kuten esimerkissä 9.

b) Merkitään $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2$ ja piirretään graafisella laskimella funktion f kuvaaja (ohessa). Sen jälkeen laskin etsii nollakohdat toiminnoilla G-SOLV ja ROOT. Voidaan myös käyttää toimintoja ZOOM ja TRACE. Edellisellä suurennetaan tai pienennetään piirrosmittakaavaa ja jälkimmäisellä jäljitetään nollakohdat kuvaajaa käyttäen.



Haetut tulokset ovat pyydetyllä tarkkuudella –0,8850 ja 2,1903.

Yhtälön ratkaiseminen graafisesti on yksi esimerkki **numeerisista menetelmistä** juurten löytämiseksi. Näitä menetelmiä on useita kuten haarukointi, puolitusmenetelmä, Newtonin menetelmä ja kiintopistemenetelmä. Nämä menetelmät esitellään lähemmin kurssissa MAA12.

Tehtäviä

1. Määritä paraabelin $y = -x^2 + 2x + 2$ ja **a)** x-akselin, **b)** suoran $y = -x + 2$ leikkauspisteet.

2. Ratkaise yhtälö.
a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ **b)** $x^3 - 2x^2 - 5x + 10 = 0$ **c)** $x^4 - 16 = 0$

3. Ratkaise yhtälö.
a) $x^4 + 2x^3 - x - 2 = 0$ **b)** $x^4 - 7x^2 - 8 = 0$ **c)** $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

4. Onko polynomi jaollinen binomilla $x - 3$?
a) $2x^2 - 4x - 5$ **b)** $x^2 - 6x + 9$ **c)** $x^3 - 2x^2 - 4x + 3$

5. Polynomi $P(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + c$ on jaollinen binomilla $x^2 - 4$ ja $P(4) = 36$. Määritä $P(x)$.

6. Määritä vakiolle a sellainen arvo, että polynomilla $3x^2 - 4x + a$ on tekijä $x - 1$. Jaa polynomi tekijöihin.

7. Määritä sellainen toisen asteen polynomifunktio, jolla on nollakohdat -3 ja 2 ja jonka arvo kohdassa 1 on 4.

8. Kolmannen asteen polynomifunktion $P(x)$ nollakohdat ovat -2, -1 ja 1. Määritä $P(x)$, kun kyseisen funktion kuvaaja kulkee pisteen (2, 24) kautta.

9. Tutki, onko yhtälöllä rationaalijuuri. Myönteisessä tapauksessa ilmoita tämä juuri.
a) $3x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$ **b)** $2x^3 + 5x^2 - 1 = 0$ **c)** $x^3 - 12x - 3 = 0$

10. Tiedetään, että luku 4 on yhtälön $2x^3 - 33x + 4 = 0$ juuri. Määritä yhtälön muut juuret.

11. Laske jakokulmassa.
a) $(6x^3 + 5x^2 - 2) : (2x - 1)$ **b)** $(-2x^4 + 3x^2 - 1) : (1 + x)$

12. Yksi yhtälön $x^3 + x + 1 = 0$ juurista on $x = a$. Osoita, että luku a on myös yhtälön $x^6 + 2x^3 - x^2 + 1 = 0$ juuri.

13. Osoita, ettei polynomi $x^3 + 2tx^2 - tx + 2$ ole millään vakion t arvolla jaollinen binomilla $x + 2t$.

14. Suorakulmaisen särmiön muotoisen tavarakontin pituus on 1,5 m suurempi kuin korkeus. Kontin pääty on neliön muotoinen, ja kontin tilavuus on 25 m^3. Määritä kontin päätyneliön sivun pituus.

15. Ratkaise yhtälö $x^4 + 2x^3 - 3 = 0$.

Vastauksia:

1. a) $(1 \pm \sqrt{3}, 0)$ **b)** (0, 2) ja (3, –1)

2. a) $x = -1$ **b)** $x = 2,\ x = \pm\sqrt{5}$ **c)** $x = \pm 2$

3. a) $x = 1,\ x = -2$ **b)** $x = \pm 2\sqrt{2}$ **c)** $x = -1,\ x = 2$

4. a) ei **b)** on **c)** on

5. $P(x) = 3x^3 - 9x^2 - 12x + 36$

6. $a = 1$, $(3x - 1)(x - 1)$

7. $-x^2 - x + 6$

8. $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4$

9. a) $x = \frac{1}{3}$ **b)** $x = -\frac{1}{2}$ **c)** ei rationaalijuurta

10. $x = -2 \pm \frac{3}{\sqrt{2}} = -2 \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$

11. a) $3x^2 + 4x + 2$ **b)** $-2x^3 + 2x^2 + x - 1$

14. 2,5 m

15. $x = 1, x = -1 - \sqrt[3]{2}$