Lukion

Calculus 1

MAA2 Polynomifunktiot

Paavo Jäppinen
Alpo Kupiainen
Matti Räsänen
Otava

PIKATESTIN JA KERTAUSKOKEIDEN TEHTÄVÄT RATKAISUINEEN

Pikatesti

1. Sievennä.

a) $3a+4-6a+12$ **b)** $(b^2-b+1)-(b^2+b)$

Ratkaisu:

a) $3a+4-6a+12=-3a+16$ **b)** $(b^2-b+1)-(b^2+b)=-2b+1$

2. Olkoon $P(x)=-3x+2$ ja $Q(x)=x^2+3x-2$. Laske.

a) $P(-3)$ **b)** $Q(\frac{1}{2})$ **c)** $P(x)+Q(x)$

Ratkaisu:

a) $P(-3)=-3\cdot(-3)+2=11$

b) $Q(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^2+3\cdot\frac{1}{2}-2=\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{4}$

c) $P(x)+Q(x)=-3x+2+x^2+3x-2=x^2$

3. Sievennä.

a) $-2a(1-5a^2)$ **b)** $(3b-4)(4+3b)$ **c)** $(-c+6)^2$

Ratkaisu:

a) $-2a(1-5a^2)=10a^3-2a$

b) $(3b-4)(4+3b)=(3b-4)(3b+4)=9b^2-16$

c) $(-c+6)^2=c^2-12c+36$

4. Jaa tekijöihin.

a) $2a^2-6a$ **b)** $4b^2-25$ **c)** x^2-6x+9

Ratkaisu:

a) $2a^2-6a=2a(a-3)$ **b)** $4b^2-25=(2b+5)(2b-5)$ **c)** $x^2-6x+9=(x-3)^2$

5. Sievennä.

a) $\frac{5}{2a}+\frac{5}{4a}$ **b)** $\frac{b}{b+1}-\frac{2b}{(b+1)^2}$ **c)** $\frac{a^2-4}{5a}\cdot\frac{25a^2}{a-2}$

Ratkaisu:

a) $\frac{5}{2a}+\frac{5}{4a}=\frac{10}{4a}+\frac{5}{4a}=\frac{15}{4a}$

b) $\frac{b}{b+1}-\frac{2b}{(b+1)^2}=\frac{b(b+1)}{(b+1)^2}-\frac{2b}{(b+1)^2}=\frac{b^2-b}{b^2+2b+1}$

c) $\frac{a^2-4}{5a}\cdot\frac{25a^2}{a-2}=\frac{(a-2)(a+2)\cdot 25a^2}{5a\cdot(a-2)}=5a^2+10a$

6. Ratkaise vaillinainen toisen asteen yhtälö.

a) $2x(1-3x)=0$ **b)** $3x^2+2x=0$ **c)** $x(x+1)=2(x+1)$

Ratkaisu:

a) $2x(1-3x)=0 \Leftrightarrow x=0$ tai $x=\frac{1}{3}$

b) $3x^2+2x=0 \Leftrightarrow x(3x+2)=0 \Leftrightarrow x=0$ tai $x=-\frac{2}{3}$

c) $x(x+1)=2(x+1) \Leftrightarrow (x+1)(x-2)=0 \Leftrightarrow x=-1$ tai $x=2$

7. Ratkaise.

a) $x^2-x-2=0$ **b)** $4x(x+2)+x+2=0$

Ratkaisu:

a) $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=-1$ tai $x=2$

b) $4x(x+2)+x+2=0 \Leftrightarrow (x+2)(4x+1)=0 \Leftrightarrow x=-2$ tai $x=-\frac{1}{4}$

8. Millä vakion a arvolla yhtälöllä $-x^2+6x+a=0$ on tarkalleen yksi ratkaisu?

Ratkaisu:

Yhtälöllä $-x^2+6x+a=0$ on tarkalleen yksi ratkaisu silloin, kun $D=6^2-4(-1)\cdot a=0$, josta $a=-9$.

9. Ratkaise yhtälö.

a) $x(x-3)(x+4)=0$ **b)** $x^3+5x^2+x+5=0$

Ratkaisu:

a) $x(x-3)(x+4)=0 \Leftrightarrow x=0$ tai $x=3$ tai $x=-4$

b) $x^3+5x^2+x+5=0 \Leftrightarrow x^2(x+5)+(x+5)=0 \Leftrightarrow (x+5)(x^2+1)=0 \Leftrightarrow x=-5$

10. Ratkaise epäyhtälö.

a) $x^2+5x-6\le 0$ **b)** $(2x-2)(x+3)(3-x)>0$

Ratkaisu:

a) $x^2+5x-6\le 0 \Leftrightarrow -6\le x\le 1$

b) Merkkikaavion mukaan $x<-3$ tai $1<x<3$.

$2x$ - 2	−	−	+	+
x + 3	−	+	+	+
3 - x	+	+	+	−
tulo	+	−	+	−
	-3	1	3	

Kertauskoe 1

1. Sievennä lauseke.

a) $(2a^3 - 4a^2 + 3a) - (-4a^2 + 3a - 1)$ **b)** $1 - (2-a)^2 - (2-a)(2+a)$

Ratkaisu:

a) $(2a^3 - 4a^2 + 3a) - (-4a^2 + 3a - 1) = 2a^3 - 4a^2 + 3a + 4a^2 - 3a + 1 = 2a^3 + 1$

b) $1 - (2-a)^2 - (2-a)(2+a) = 1 - 4 + 4a - a^2 - 4 + a^2 = 4a - 7$

2. **a)** Sievennä lauseke $\frac{1}{r} - \frac{1}{s}$, kun tiedetään, että luvut r ja s ovat toistensa käänteisluku-ja.

b) Muodosta neliöt $(y^2 + 2)^2$ ja $(2y - 3)^2$ sekä laske niiden erotus.

c) Sievennä lauseke $\frac{x^3 - x}{x^2 - x}$.

Ratkaisu:

a) $\frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{s - r}{rs} = s - r$, koska käänteislukujen tulo $rs = 1$.

b) $(y^2 + 2)^2 - (2y - 3)^2 = y^4 + 4y^2 + 4 - (4y^2 - 12y + 9)$

$= y^4 + 4y^2 + 4 - 4y^2 + 12y - 9 = y^4 + 12y - 5$

c) $\frac{x^3 - x}{x^2 - x} = \frac{x(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = x + 1$

3. Ratkaise yhtälö.

a) $4 - \frac{x^2}{3} = 0$ **b)** $3x^2 - 8x = 3$ **c)** $x^3 - 5x^2 - 14x = 0$

Ratkaisu:

a) $4 - \frac{x^2}{3} = 0 \Leftrightarrow 12 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$

b) $3x^2 - 8x = 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ tai $x = 3$

c) $x^3 - 5x^2 - 14x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 5x - 14) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ tai $x = -2$ tai $x = 7$

4. **a)** Ratkaise epäyhtälö $(x-1)^2 < 9$.

b) Millä x:n arvoilla lauseke $\sqrt{1 - x - 2x^2}$ on määritelty?

Ratkaisu:

a) $(x-1)^2 < 9 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 4$

b) Lauseke $\sqrt{1 - x - 2x^2}$ on määritelty, kun $1 - x - 2x^2 \geq 0$. Epäyhtälö toteutuu, kun $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

5. Autoilijan työmatkan kesto t riippuu liikennevirrasta m kaavan $t = 0{,}01m^2 + 0{,}03m + 18$ mukaisesti, missä t on ajoaika minuutteina ja m liikenteen mittauspisteen minuutissa ohittavien autojen määrä. Kuinka suuri saa liikennevirta enintään olla, jotta autoilijan työmatka kestäisi enintään puoli tuntia? (yo-teht. K93/3)

Ratkaisu:
Siitä vaatimuksesta, että työmatkan kesto on enintään puoli tuntia, saadaan epäyhtälö $0{,}01m^2 + 0{,}03m + 18 \le 30$ eli $m^2 + 3m - 1200 \le 0$. Epäyhtälö toteutuu arvoilla $0 \le m \le \dfrac{-3 + \sqrt{4\,809}}{2} \approx 33{,}2.$ Liikennevirta m saa olla enintään 33 autoa minuutissa.

6. **a)** Määritä vakio t siten, että yhtälöllä $tx^2 + tx + t - 1 = 0$ on täsmälleen yksi juuri. Mikä on tämä juuri?
b) Osoita, että yhtälöllä $ax^2 + (a-2)x - 2 = 0$ on reaalijuuria kaikilla vakion a arvoilla.

Ratkaisu:
a) Yhtälöllä $tx^2 + tx + t - 1 = 0$ on täsmälleen yksi juuri silloin, kun $D = t^2 - 4t(t-1) = 0$ eli $-3t^2 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ tai $t = \dfrac{4}{3}.$ Näistä vain jälkimmäinen käy. Sijoitetaan saatu t:n arvo alkuperäiseen yhtälöön, jolloin $\dfrac{4}{3}x^2 + \dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{3} = 0$ eli $4x^2 + 4x + 1 = 0.$ Yhtälön ratkaisuna $x = -\dfrac{1}{2}.$

b) Muodostetaan diskriminantti:
$D = (a-2)^2 - 4a(-2) = a^2 - 4a + 4 + 8a = a^2 + 4a + 4 = (a+2)^2.$
Koska $D = (a+2)^2 \ge 0$, yhtälöllä on reaalijuuria kaikilla vakion a arvoilla.

7. Ratkaise.
a) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ **b)** $x^3 + x^2 > 5x + 5$

Ratkaisu:
a) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 6x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2$ tai $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ tai $x = \pm 2$

b) $x^3 + x^2 > 5x + 5 \Leftrightarrow x^2(x+1) - 5(x+1) > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 5) > 0$

Oheisen merkkikaavion mukaan ratkaisu on $-\sqrt{5} < x < -1$ tai $x > \sqrt{5}.$

$x + 1$	−	−	+	+
$x^2 - 5$	+	−	−	+
tulo	−	+	−	+
	$-\sqrt{5}$	-1	$\sqrt{5}$	

***8.** Ratkaise.
a) $\sqrt{4 - x} = x + 3$ **b)** $\sqrt{x + 2} < x$

Ratkaisu:

a) Määrittelyehdon mukaan $4 - x \geq 0$ eli $x \leq 4$, ja neliöjuuren arvoon liittyvän ehdon mukaan $x + 3 \geq 0$. Yhdistettyinä ehdot antavat tuloksen $-3 \leq x \leq 4$. Korottamalla neliöön saadaan $4 - x = x^2 + 6x + 9$ eli $x^2 + 7x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{29}}{2}$. Näistä valitaan alkuehtojen nojalla $x = \dfrac{-7 + \sqrt{29}}{2}$.

b) Reaalisuus- ja neliöjuuriehdot yhdistettyinä edellyttävät, että $x \geq 0$. Neliöön korotus antaa tuloksen $x + 2 < x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow x < -1$ tai $x > 2$. Ottamalla huomioon alussa asetettu ehto saadaan ratkaisuksi $x > 2$.

Kertauskoe 2

1. Sievennä **a)** $-3a(-4a)^2$ **b)** $\dfrac{3b+3}{6b+6}$

Kirjoita polynomina **c)** $(-3c+4)^2$ **d)** $(d - d^2)(d + d^2)$

Jaa tekijöihin **e)** $3e - 3e^3$ **f)** $1 + f^2 - 2f$

Ratkaisu:

a) $-3a(-4a)^2 = -3a \cdot 16a^2 = -48a^3$

b) $\dfrac{3b+3}{6b+6} = \dfrac{3(b+1)}{6(b+1)} = \dfrac{1}{2}$

c) $(-3c+4)^2 = 9c^2 - 24c + 16$

d) $(d - d^2)(d + d^2) = d^2 - d^4$

e) $3e - 3e^3 = 3e(1 - e^2) = 3e(1-e)(1+e)$

f) $1 + f^2 - 2f = (1 - f)^2$

2. Sievennä lauseke.

a) $(3a-2)^2 - (3-a)(3+a)$ **b)** $\dfrac{4b^2 - 1}{4b^2 - 4b + 1}$

Ratkaisu:

a) $(3a-2)^2 - (3-a)(3+a) = 9a^2 - 12a + 4 - 9 + a^2 = 10a^2 - 12a - 5$

b) $\dfrac{4b^2 - 1}{4b^2 - 4b + 1} = \dfrac{(2b+1)(2b-1)}{(2b-1)^2} = \dfrac{2b+1}{2b-1}$

3. Olkoon $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$ ja $g(x) = x^3 + x^2 - 2x + 3$.

Laske **a)** $f(-2)$. **b)** $g(\frac{1}{2})$. **c)** Ratkaise yhtälö $f(x) = g(x)$. (yo-teht. K04/1)

Ratkaisu:

a) $f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 2 + 1 = -8 + 12 - 2 + 1 = 3$

b) $g(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 + 3 = 2\frac{3}{8}$

c) $x^3 + 3x^2 + x + 1 = x^3 + x^2 - 2x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ tai $x = \dfrac{1}{2}$

4. Millä a:n arvoilla yhtälön $2x^2 - ax + a = 0$ juuret ovat reaaliset?

Ratkaisu:

Yhtälön $2x^2 - ax + a = 0$ juuret ovat reaaliset, kun $D = (-a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot a \geq 0$. Epäyhtälön $a^2 - 8a \geq 0$ ratkaisuna $a \leq 0$ tai $a \geq 8$.

5. Ratkaise. **a)** $2x^3 - x^2 - 6x + 3 = 0$ **b)** $x^3 + 2x^2 \geq 3x$

Ratkaisu:

a) $2x^3 - x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2(2x-1) - 3(2x-1) = (2x-1)(x^2-3) = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ tai $x = \pm\sqrt{3}$

b) $x^3 + 2x^2 \geq 3x \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 3x \geq 0$

$\Leftrightarrow x(x^2 + 2x - 3) \geq 0$. Merkkikaaviosta nähdään, että $-3 \leq x \leq 0$ tai $x \geq 1$

x	–	–	+	+
$x^2 + 2x - 3$	+	–	–	+
tulo	–	+	–	+
	-3		0	1

6. *Kultainen leikkaus* tarkoittaa janan jakoa kahteen osaan niin, että koko janan pituuden suhde pitempään osaan on sama kuin pitemmän osan suhde lyhyempään. Laske millimetrin tarkkuudella yhden metrin mittaisen janan osat, kun jana on jaettu kultaisen leikkauksen mukaisesti.

Ratkaisu:
Janan pituus on 1 (m), pidemmän osan pituus x ja lyhyemmän $1 - x$. Silloin
$\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{1-x}$, josta $x^2 + x - 1 = 0$ ja $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Janan pituudeksi sopii vain
$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618$. Alkuperäisen janan osien pituudet ovat 0,618 m ja 0,382 m.

7. Yhtälössä $x^3 + ax^2 - 2a^2x - 2 = 0$ vakio a on positiivinen ja $x = -1$ on yksi juurista. Määritä muut juuret.

Ratkaisu:
Sijoitetaan $x = -1$ annettuun yhtälöön. $(-1)^3 + a(-1)^2 - 2a^2(-1) - 2 = 0$
$\Leftrightarrow 2a^2 + a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = -1{,}5$ tai $a = 1$. Näistä jälkimmäinen on positiivinen.
Yhtälö on $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$. Jaetaan yhtälön vasen puoli tekijöihin ryhmittelemällä. $x^2(x+1) - 2(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-2) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ tai $x = \pm\sqrt{2}$.

***8.** Osoita, että epäyhtälö $x + 4 \geq 4\sqrt{x}$ on voimassa kaikilla luvun x ei-negatiivisilla arvoilla.

Ratkaisu:
Kun oletuksen ehto $x \geq 0$ on voimassa, epäyhtälöstä $x + 4 \geq 4\sqrt{x}$ saadaan yhtäpitävä epäyhtälö neliöön korottamalla. Tällöin
$x + 4 \geq 4\sqrt{x} \Leftrightarrow (x+4)^2 \geq 16x \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 - 16x \geq 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 \geq 0$.
Saatu tulos todistaa alkuperäisen väitteen paikkansa pitävyyden.