Kertaustehtävien ratkaisuja

Luku 1

1. Tähden pintalämpötila on noin 5000 K. Millä aallonpituudella tähti säteilee voimakkaimmin?

Ratkaisu:
Maksimia vastaava aallonpituus on

$$\lambda_{\max} = \frac{2900\ \mu\text{m}\cdot\text{K}}{T} = \frac{2900\ \mu\text{m}\cdot\text{K}}{5000\ \text{K}} \approx 0{,}58\ \mu\text{m} \approx 580\ \text{nm}$$

2. Ihmisen silmä havaitsee herkimmin valoa aallonpituudella 555 nm (oranssi). Pienin energia, jolla valon intensiteetti on riittävä ihmisen aistittavaksi, on $10^{-17}\,\text{J}$. Kuinka paljon fotoneja tarvitaan saamaan aikaan näköhavainto?

Ratkaisu:
Yhden säteilykvantin energia on tällä aallonpituudella

$$E_1 = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}626\cdot10^{-34}\,\text{Js}\cdot 2{,}998\cdot10^{8}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{555\cdot10^{-9}\text{m}} \approx 3{,}580\cdot10^{-19}\,\text{J}$$

Tarvittava fotonien lukumäärä on

$$\frac{E}{E_1} = \frac{10^{-17}\,\text{J}}{3{,}58\cdot10^{-19}\text{J}} = \frac{100}{3{,}58} \approx 28$$

Luku 2

3. Kuinka suuri on kiteessä niiden atomitasojen välinen etäisyys, joista aiheutuva röntgensäteilyn toisen kertaluvun (n = 2) heijastus poikkeaa tulosuunnasta 32°? Röntgensäteilyn aallonpituus on 154 pm. (Yo k 71, osa tehtävää)

Ratkaisu:
Braggin lain mukaan pätee

$$2d\sin\theta = n\lambda$$

Joten atomitasojen välinen etäisyys on

$$d = \frac{n\lambda}{2\sin\theta} = \frac{2\cdot1{,}54\cdot10^{-10}\text{m}}{2\cdot\sin16°} = 5{,}59\cdot10^{-10}\text{m} = 559\ \text{pm}$$

4. Sähkömagneettinen säteily, jonka aallonpituus on 350 nm, kykenee irrottamaan erään metallin pinnasta elektroneja, joiden liike-energian suurin arvo on 1,8 eV. Kun säteilyn aallonpituus on 550 nm, on tämä arvo 0,50 eV. Mitä tietoa voidaan saada edellä mainituista mittaustuloksista? Suorita päätelmien tekoon tarvittavat laskut. (Yo k 75)

Ratkaisu:
Valosähköiselle ilmiölle pätee

$$E_{k\,\max} = hf - W_0$$

missä $hf = \frac{hc}{\lambda}$ on kvantin energia, W_0 elektronien irrotustyö kyseisestä metallista ja $E_{k\,\max}$ fotoelektronien suurin mahdollinen liike-energia.

Annettujen mittaustulosten avulla saadaan silloin ensin Planckin vakio:

$$E_{k1} - E_{k2} = hc(f_1 - f_2) = hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)$$

$$\Rightarrow h = \frac{\lambda_1\lambda_2(E_{k1} - E_{k2})}{(\lambda_2 - \lambda_1)c} = \frac{350\cdot10^{-9}\,\mathrm{m}\cdot 550\cdot10^{-9}(1{,}80 - 0{,}50)\,\mathrm{eV}}{\left(550\cdot10^{-9} - 350\cdot10^{-9}\right)\cdot 3{,}00\cdot10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \approx 4{,}2\cdot10^{-15}\,\mathrm{eVs}$$

$$E_{k1} - E_{k2} = hc(f_1 - f_2) = hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)$$

$$\Rightarrow h = \frac{\lambda_1\lambda_2(E_{k1} - E_{k2})}{(\lambda_2 - \lambda_1)c} = \frac{350\cdot10^{-9}\,\mathrm{m}\cdot 550\cdot10^{-9}(1{,}80 - 0{,}50)\,\mathrm{eV}}{\left(550\cdot10^{-9} - 350\cdot10^{-9}\right)\cdot 3{,}00\cdot10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \approx 4{,}2\cdot10^{-15}\,\mathrm{eVs}$$

Irrotustyöksi saadaan:

$$W_0 = \frac{hc}{\lambda_1} - E_{k1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}(E_{k1} - E_{k2}) - E_{k1}$$
$$= \frac{550\ \mathrm{nm}}{(550 - 350)\,\mathrm{nm}}(1{,}80 - 0{,}50)\,\mathrm{eV} - 1{,}80\ \mathrm{eV} \approx 1{,}8\ \mathrm{eV}$$

Vielä voidaan laskea rajataajuus tai raja-aallonpituus. Rajataajuus on

$$f_0 = \frac{W_0}{h} = \frac{1{,}78\ \mathrm{eV}}{4{,}17\cdot10^{-15}\,\mathrm{eVs}} = 4{,}27\cdot10^{14}\,\mathrm{Hz} \approx 0{,}43\ \mathrm{PHz}$$

5. Alumiiniin osuu säteily, jonka aallonpituus on 210 nm. Mikä on alumiinista irronneiden nopeimpien elektronien liike-energia? Mikä on sen säteilyn aallonpituus, joka juuri ja juuri pystyy irrottamaan elektroneja alumiinista? Elektronin irrottamiseen alumiinista tarvittava työ on 4,2 eV. (Yo k 77)

Ratkaisu:

Valosähköiselle ilmiölle pätee $E_{k\,\mathrm{max}} = hf - W_0$. $hf = \frac{hc}{\lambda}$ on kvantin energia, W_0 elektronien irrotustyö ja $E_{k\,\mathrm{max}}$ fotoelektronien suurin mahdollinen liike-energia.

Nopeimpien elektronien liike-energia on

$$E_{k\,\mathrm{max}} = \frac{hc}{\lambda} - W_0 = \frac{4{,}136\cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs}\cdot 2{,}998\cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{210\cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} - 4{,}2\ \mathrm{eV} = 1{,}7\ \mathrm{eV}$$

Raja-aallonpituus vastaa tilannetta, jolloin elektroneille ei jää liike-energiaa. Se on

$$\lambda_0 = \frac{hc}{W_0} = \frac{4{,}136\cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs}\cdot 2{,}998\cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{4{,}2\ \mathrm{eV}} = 300\ \mathrm{nm}$$

6. Vetyatomin energiatilat saadaan kaavasta $E_n = -\frac{13{,}6\ \mathrm{eV}}{n^2}$, $n = 1, 2, \ldots$ Laske kuuden alimman tilan energiat ja piirrä vastaava energiatasokaavio. Merkitse kaavioon siirtymät, joissa syntyvien fotonien aallonpituus on alueella 450…750 nm ja laske näiden fotonien energiat. (Yo k 79)

Ratkaisu:

Lasketaan energiat $E_n = -\frac{13{,}6\ \mathrm{eV}}{n^2}$, $n = 1, 2, \ldots, 6$. Energiatilat ovat

$E_1 = -13{,}6\ \mathrm{eV}$

$E_2 = -3{,}40\ \mathrm{eV}$

$E_3 = -1{,}51\ \mathrm{eV}$

$E_4 = -0{,}85\ \mathrm{eV}$

$E_5 = -0{,}54\ \mathrm{eV}$

$E_6 = -0{,}38\ \mathrm{eV}$

Aallonpituuksia 450 nm ja 750 nm vastaavat fotonien energiat ovat

$$E' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{4{,}136\cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs}\cdot 2{,}998\cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{450\cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} = 2{,}76\ \mathrm{eV}$$

$$E'' = \frac{hc}{\lambda''} = \frac{4{,}136\cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs}\cdot 2{,}998\cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{750\cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} = 1{,}65\ \mathrm{eV}$$

Vertaamalla näitä energiatilojen 1-6 erotuksiin havaitaan, että kyseiselle energia-alueelle osuvat vain siirtymissä $3 \to 2$ ja $4 \to 2$ emittoituvien fotonien energiat.

Luku 3

7. Yksivärisen valon aallonpituus on 550 nm. Laske tätä aallonpituutta vastaavan valokvantin (fotonin) energia ja (liike)massa. (Yo k 69)

Ratkaisu:

Fotonin energia on $E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{4{,}136\cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs}\cdot 2{,}998\cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{5{,}5\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}} = 2{,}3\ \mathrm{eV}$

Tämän energian kanssa ekvivalentti massa on

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h}{\lambda c} = \frac{6{,}626\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}}{5{,}5\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}\cdot 2{,}998\cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 4{,}0\cdot 10^{-36}\,\mathrm{kg}$$

8. Fotonin taajuus on $12\cdot 10^{18}\,\mathrm{Hz}$. Laske fotonin relativistinen massa. Mikä on tämän massan suhde elektronin lepomassaan? Mikä on fotonin liikemäärä? (Yo s 77)

Ratkaisu:

Massan ja energian ekvivalenssista sekä kvantin energiasta $E = hf = mc^2$ seuraa fotonille relativistinen massa

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{hf}{c^2} = \frac{6{,}626\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}\cdot 12\cdot 10^{18}\,\frac{1}{\mathrm{s}}}{\left(2{,}998\cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)} = 8{,}8\cdot 10^{-32}\,\mathrm{kg}$$

Suhde elektronin lepomassaan:

$$\frac{m}{m_e} = \frac{8{,}8\cdot 10^{-32}\,\mathrm{kg}}{9{,}11\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}} \approx 0{,}097$$

Fotonin liikemäärä on

$$p = mc = 8{,}8\cdot 10^{-32}\,\mathrm{kg}\cdot 3{,}00\cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 2{,}7\cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}}$$

9. Röntgensäteilyn jarrutussäteilyn pienin aallonpituus on 5,0 pm. Laske elektronien suurin nopeus a) klassisesti b) relativistisesti.

Ratkaisu:
Lyhin jarrutussäteilyn aallonpituus saadaan, kun nopeimmat elektronit luovuttavat koko liike-energiansa röntgenkvantin energiaksi

$$E_{k\,\max} = hf_{\max} = \frac{hc}{\lambda_{\min}}$$

a) Klassista liike-energian lauseketta käyttäen saadaan

$$hf = \frac{hc}{\lambda_{\min}} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

$$\Rightarrow v_{\max}^2 = \frac{2hc}{\lambda_{\min}m}$$

$$\Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{2hc}{\lambda_{\min}m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}62\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}\cdot 3{,}00\cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{5{,}0\cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}\cdot 9{,}11\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}} = 2{,}97\cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Tulos on lähellä valonnopeutta. Klassinen tarkastelu ei siis ole oikeutettu, vaan antaa selvästi virheellisen tuloksen.

b) Relativistisesti elektronin liike-energia on kokonaisenergian ja lepomassaa vastaavan energian erotus:

$$E_k = \frac{m_ec^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - m_ec^2 = m_ec^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1\right) \Rightarrow \frac{hc}{\lambda_{\min}} = m_ec^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v_{\max}}{c}\right)^2}} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-\left(\frac{v_{\max}}{c}\right)^2} = \left(\frac{hc}{\lambda_{\min}m_ec^2}+1\right)^{-1} \Rightarrow \left(\frac{v_{\max}}{c}\right)^2 = 1-\left(\frac{hc}{\lambda_{\min}m_ec^2}+1\right)^{-2} = 1-\left(\frac{m_ec^2}{\frac{hc}{\lambda_{\min}}+m_ec^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow v_{\max} = c\sqrt{1-\left(\frac{m_ec^2}{\frac{hc}{\lambda_{\min}}+m_ec^2}\right)^2} = c\sqrt{1-\left(\frac{1}{\frac{hc}{\lambda_{\min}m_ec^2}+1}\right)^2}$$

$$= c\sqrt{1-\left(\frac{1}{\dfrac{4,136\cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs}\cdot 3,00\cdot 10^{8}\,\mathrm{m}}{5,0\cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}\cdot 0,511\cdot 10^{6}\,\mathrm{eV\cdot s}}+1}\right)^2} = 0,741c = 0,741\cdot 3,00\cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 2,22\cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

10. Röntgenputkessa kiihdytettyjen elektronien nopeus on 58,6 % valon nopeudesta tyhjiössä. Laske elektronien energia (kokonaisenergia). (Yo k 79)

Ratkaisu:
Elektronin kokonaisenergia on

$$E = mc^2 = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} = \frac{9,11\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}\cdot\left(3,00\cdot 10^8\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{\sqrt{1-0,586^2}} = 101\ \mathrm{fJ} = 631\ \mathrm{keV}$$

Luku 4

11. Elektronisuihku, jonka de Broglien aallonpituus on 10 μm, kulkee 100 μm leveän raon läpi. a) Määritä elektronisuihkun diffraktion taipumiskulma. b) Mikä on elektronien nopeus?

Ratkaisu:
a) Määritellään

λ = elektronin aallonpituus = 10 μm
a = raon leveys = 100 μm

Taipumiskulma on

$$\alpha \approx \frac{\lambda}{a} = \frac{10\,\mu\mathrm{m}}{100\,\mu\mathrm{m}} = 0,10\,\mathrm{rad} \approx 5,7°$$

b) Elektronien liikemäärä on

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

Oletetaan, että nopeus voidaan laskea epärelativistisesti. Silloin se olisi

$$v = \frac{p}{m} = \frac{h}{m\lambda} = \frac{6,63\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}}{9,11\cdot 10^{-34}\,\mathrm{kg}\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}} \approx 73\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Tämä on paljon pienempi kuin valon nopeus, joten epärelativistinen käsittely on oikeutettu.

12. Termisten neutronien liike-energia on 0,025 eV. Mikä on niiden de Broglien aallonpituus? Neutronit kohtaavat NaCl-kiteen, jossa atomitasojen väli on 0,28 nm. Laske ensimmäisen kertaluvun spektrin kiiltokulma. (Yo s 79)

Ratkaisu:
Termisille neutroneille pätee klassinen liike-energian lauseke. Elektronin liike-energiasta ratkaistaan nopeus:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$$

Elektronin de Broglien aallonpituus on

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2 \cdot E_k}}$$

$$= \frac{4{,}136 \cdot 10^{-15}\,\text{eVs} \cdot 2{,}998 \cdot 10^{8}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\sqrt{2 \cdot 511 \cdot 10^{3}\text{eV} \cdot 25 \cdot 10^{-3}\text{eV}}} = 1{,}81 \cdot 10^{-10}\,\text{m} \approx 0{,}18\ \text{nm}$$

Neutronien sirotessa kiteen atomitasoista tapahtuu aineaaltojen interferenssi. Kide toimii kuten heijastushila. Kiiltokulma saadaan Braggin laista:

$$2d\sin\theta = n\lambda \Rightarrow \sin\theta = \frac{n\lambda}{2d} = \frac{1 \cdot 0{,}181\ \text{nm}}{2 \cdot 0{,}28\ \text{nm}} \approx 0{,}323 \Rightarrow \theta = 19°$$

Vastaus saadaan myös suoraan ratkaisematta aallonpituuden lukuarvoa:

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{2d} = \frac{hc}{2d\sqrt{2mc^2 \cdot E_k}} \approx 0{,}323$$

13. Laske klassisesti ja relativistisesti elektronin de Broglien aallonpituus, kun sen liike-energia on a) 100 keV, b) 250 keV.

Ratkaisu:
Elektronin de Broglien aallonpituus on $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$, missä h on Planckin vakio ja p on elektronin liikemäärä. Klassisesti pätee

$$E_k = \frac{1}{2}m_e v^2 = \frac{p^2}{2m_e} \Rightarrow p = \sqrt{2m_e E_k}$$

Relativistisesti laskemalla saadaan

$$E_k = m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right) \Rightarrow \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 - \left(\frac{E_k}{m_e c^2} + 1\right)^{-2} \Rightarrow v = c\sqrt{1-\left(\frac{m_e c^2}{E_k + m_e c^2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow p = m_e v = m_e c \sqrt{1-\left(\frac{1}{\frac{E_k}{m_e c^2}+1}\right)^2}$$

missä $m_e c^2 = 511\ \text{keV}$

a) Klassisesti

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e E_k}} = \frac{hc}{\sqrt{2m_e c^2 \cdot E_k}} = \frac{4{,}136\cdot 10^{-15}\,\text{eVs}\cdot 3{,}00\cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\sqrt{2\cdot 5{,}11\cdot 10^5\,\text{eV}\cdot 10^5\,\text{eV}}} = 3{,}88\cdot 10^{-12}\,\text{m} \approx 3{,}9\ \text{pm}$$

Relativistisesti

$$\lambda = \frac{h}{m_e c\sqrt{1-\left(\frac{1}{\frac{E_k}{m_e c^2}+1}\right)^2}} = \frac{hc}{m_e c^2\sqrt{1-\left(\frac{1}{\frac{E_k}{m_e c^2}+1}\right)^2}}$$

$$= \frac{4{,}136\cdot 10^{-15}\ \text{eVs}\cdot 3{,}00\cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}511\cdot 10^6\,\text{eV}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{10^5\,\text{eV}}{5{,}11\cdot 10^5\,\text{eV}}+1\right)^{-2}}} = 4{,}429\cdot 10^{-12} \approx 4{,}4\ \text{pm}$$

b) Klassisesti

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e E_k}} = \frac{hc}{\sqrt{2m_e c^2 \cdot E_k}} = \frac{4{,}136\cdot 10^{-15}\,\text{eVs}\cdot 3{,}00\cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\sqrt{2\cdot 5{,}11\cdot 10^5\,\text{eV}\cdot 2{,}5\cdot 10^5\,\text{eV}}} = 2{,}454\cdot 10^{-12}\,\text{m} \approx 2{,}5\ \text{pm}$$

Relativistisesti:

$$\lambda = \frac{h}{m_e c\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\dfrac{E_k}{m_e c^2}+1}\right)^2}} = \frac{hc}{m_e c^2\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\dfrac{E_k}{m_e c^2}+1}\right)^2}}$$

$$= \frac{4{,}136\ \cdot 10^{-15}\text{eVs}\cdot 3{,}00\cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}511\cdot 10^6\text{eV}\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{2{,}5\cdot 10^5\,\text{eV}}{5{,}11\cdot 10^5\,\text{eV}}+1\right)^{-2}}} = 3{,}277\cdot 10^{-12} \approx 3{,}3\ \text{pm}$$

14. Kappaleen paikka tunnetaan 100 nm tarkkuudella. Millä tarkkuudella voidaan määrittää kappaleen nopeus, jos kappale on a) elektroni, b) massaltaan 1,0 g?

Ratkaisu:
Heisenbergin epämääräisyysrelaation tarkka muoto on

$$\Delta x \Delta p \leq \frac{\hbar}{2}$$

Sitä käytetään usein muodossa $\Delta x \Delta p \leq \hbar$. Nopeuden avulla voidaan kirjoittaa

$$\Delta x \cdot m\Delta v \approx \hbar \Rightarrow \Delta v \approx \frac{\hbar}{m\Delta x}$$

Elektronille saadaan

$$\Delta x \cdot m\Delta v \approx \hbar \Rightarrow \Delta v \approx \frac{\hbar}{m\Delta x} = 1150\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 1200\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Kappaleelle, jonka massa on 1,0 g saadaan

$$\Delta x \cdot m\Delta v \approx \hbar \Rightarrow \Delta v \approx \frac{\hbar}{m\Delta x} \approx 1{,}1\cdot 10^{-24}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Epämääräisyystulon alarajaa käyttäen saadaan tulos

$$\Delta v \approx \frac{\hbar}{2m\Delta x} \approx 5{,}3\cdot 10^{-25}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Käytännössä yksinkertaisempi muoto kelpaa likimääräisissä tarkasteluissa, koska epämääräisyystulon tarkka arvo riippuu täysin siitä minkälainen tarkasteltavan systeemin kvanttimekaaninen tilafunktio on. Esimerkiksi perustilassa olevaan vetyatomin elektroniin pätee tarkasti $\Delta x \Delta p \leq \hbar$.

Luku 5

15. Vetyatomin elektroni siirtyy kolmannelta viritystilalta toiselle viritystilalle. Mikä on atomin emittoiman säteilyn aallonpituus?

Ratkaisu:
Siirtymässä vapautuvan kvantin energia on

$$\Delta E = E_3 - E_4 = 13{,}6\ \text{eV}\cdot\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\right)=\frac{7}{144}\cdot 13{,}6\ \text{eV}\approx 0{,}661\ \text{eV}$$

Säteilyn aallonpituus on

$$\lambda = \frac{hc}{E_3 - E_4} = \frac{4{,}136\cdot 10^{-15}\,\text{eVs}\cdot 2{,}998\cdot 10^{8}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{13{,}6\ \text{eV}\cdot\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\right)} = 1{,}875\,\mu\text{m} = 1875\ \text{nm}$$

16. a) Kuinka suuri energia täytyy antaa perustilassa olevalle vetyatomille, jotta saataisiin aikaan H_α-viiva? Laske H_α-viivan aallonpituus. Vetyatomin ionisaatioenergia on 13,6 eV. (Yo s 78)
b) Millä jännitteellä elektroni pitää kiihdyttää, jotta sen törmäys perustilassa olevaan vetyatomiin voisi saada aikaan Balmerin sarjan H_α -viivan?

Ratkaisu:
a) Vetyatomin H_α -viiva vastaa siirtymää $3 \to 2$ eli toiselta viritystilalta ensimmäiselle viritystilalle. Jotta tämä siirtymä voisi tapahtua, on vetyatomi ensin saatava perustilasta toiselle viritystilalle. Tähän tarvittava energia on

$$\Delta E = E_1 - E_3 = 13{,}6\ \text{eV}\cdot\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}\right)=\frac{8}{9}\cdot 13{,}6\ \text{eV} = 12{,}1\ \text{eV}$$

H_α -viivan aallonpituus:

$$\lambda_\alpha = \frac{hc}{E_2 - E_3} = \frac{4{,}136\cdot 10^{-15}\,\text{eVs}\cdot 2{,}998\cdot 10^{8}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{13{,}6\ \text{eV}\cdot\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)} = 656\ \text{nm}$$

b) Balmerin sarjan pitkäaaltoisin (pienienergisin) viiva vastaa emissiospektrin siirtymää toiselta viritystilalta ensimmäiselle viritystilalle (näkyvän valon alueella). Jotta tämä viiva voisi esiintyä emissiospektrissä, on elektronin pystyttävä siirtämään vetyatomi perustilasta ensimmäiselle viritystilalle. Elektronin liike-energian on siis oltava näiden tilojen energioiden erotuksen suuruinen:

$$eU = R_H hc\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)$$

$$= 1{,}0974\cdot 10^7\ \frac{1}{\text{m}}\cdot 4{,}13567\cdot 10^{-15}\,\text{eVs}\cdot 3{,}00\cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^3}\right)\approx 12{,}1\ \text{eV}$$

Kiihdytysjännitteen on siis oltava vähintään 12,1 V.

Luku 6

17. Kun litiumia ^7Li pommitetaan protoneilla, joiden liike-energia on 300 keV, syntyy kaksi alfahiukkasta, joiden molempien liike-energia on 8,8 MeV. Kirjoita ydinreaktioyhtälö ja laske ^7Li :n atomimassa. (Yo s 75)

Ratkaisu:

Reaktioyhtälö: ${}^7_3\text{Li}+{}^1_1\text{H}\rightarrow 2\,{}^4_2\text{He}$

Vastaava energiayhtälö:

$$m_{\text{Li}}c^2 + m_p c^2 + E_{kp} = 2m_\alpha c^2 + 2E_{k\alpha}$$

$$\Rightarrow m_{\text{Li}} = 2m_\alpha - m_p + \frac{2E_{k\alpha}-E_{kp}}{c^2}$$

$$= \left(2\cdot 4{,}00260 - 1{,}00783\right)\text{u} + \frac{\left(2\cdot 8{,}8-0{,}3\right)\cdot 10^6\,\text{eV}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \frac{\text{J}}{\text{eV}}}{\left(3{,}00\cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\ \frac{\text{kg}}{\text{u}}} = 7{,}016\ \text{u}$$

18. Kuvitellaan, että tulevaisuudessa onnistutaan käyttämään ydinvoimaloissa fuusioreaktiota $2\,{}^2_1\text{H}\rightarrow {}^4_2\text{He}+\text{energia}$. Kuinka paljon käytetään silloin deuteriumia vuodessa sellaisessa ydinvoimalassa, jonka reaktorin lämmitysteho on 1400 MW? (Yo k 76)

Ratkaisu:

Fuusioreaktion massavaje deuteronia kohti on $\Delta m = \dfrac{2m_D - m_{He}}{2}$

Tätä vastaava energia on $\Delta E = \Delta m\cdot c^2$

Vuoden aikana tuotettava energia on $E = Pt$

Käytettyjen deuteronien lukumäärä $N = \dfrac{E}{\Delta E}$

Käytetyn deuteriumin massa

$$m = Nm_D = \frac{Em_D}{\Delta E} = \frac{2Ptm_D}{\left(2m_D - m_{He}\right)c^2}$$

$$= \frac{2 \cdot 1,4 \cdot 10^9\,\mathrm{W} \cdot \left(365,25 \cdot 24 \cdot 60^2\,\mathrm{s}\right)^2 \cdot 2,0141\,\mathrm{u}}{\left(2 \cdot 2,0141 - 4,0026\right)\mathrm{u} \cdot \left(3,00 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 77\,\mathrm{kg}$$

19. $^{28}\mathrm{Al}$ -ydin hajoaa siten, että se säteilee β^- -hiukkasen ja muuttuu samalla $^{28}\mathrm{Si}$ -ytimeksi. Erään $^{28}\mathrm{Al}$ -näytteen säteilyn intensiteetti pienenee 23 minuutissa tuhannesosaan alkuperäisestä arvostaan. Laske $^{28}\mathrm{Al}$:n puoliintumisaika ja aika, jonka kuluessa säteilyn intensiteetti pienenee miljoonasosaan alkuperäisestä arvostaan.
(Yo k 77)

Ratkaisu:
Säteilyn intensiteetti on verrannollinen näytteen aktiivisuuteen, joten intensiteetti pienenee eksponentiaalisesti noudattaen lakia

$$I = I_0 e^{-\lambda t} = I_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{½}}t} = I_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{½}}}$$

Tästä seuraa

$$\ln\frac{I}{I_0} = -\frac{t\ln 2}{T_{½}} \Rightarrow \ln\frac{I}{I_0} = \frac{t\ln 2}{T_{½}}$$

Puoliintumisaika on

$$T_{½} = \frac{\ln 2}{\ln\frac{I_0}{I}}t = \frac{\ln 2}{\ln 1000}23\,\mathrm{min} = 2{,}3\,\mathrm{min}$$

Koska $10^{-6} = \left(10^{-3}\right)^2$ on intensiteetin miljoonasosaan pienenemiseen kuluva aika ja siis kaksinkertainen verrattuna aikaan, joka kuluu intensiteetin pienetessä tuhannesosaan, on kysytty aika 46 min.

20. Eräässä kiillenäytteessä on $^{87}_{38}\mathrm{Sr}$ -ytimien lukumäärän suhde $^{87}_{37}\mathrm{Rb}$ -ytimien määrään 0,060. Laske näytteen ikä, jos oletetaan, että $^{87}\mathrm{Sr}$ -ytimet ovat syntyneet pelkästään $^{87}\mathrm{Rb}$ -ydinten hajoamisen tuloksena. $^{87}\mathrm{Rb}$:n puoliintumisaika on $4,7 \cdot 10^{10}\,\mathrm{a}$. Minkä tyyppisestä hajoamisesta on kysymys? (Yo s 78)

Ratkaisu:

Hajoamisyhtälö on ${}^{87}_{37}\mathrm{Rb} \rightarrow {}^{87}_{38}\mathrm{Sr} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e} + {}^{0}_{0}\bar{\nu}$

Kyseessä on siis β^-- hajoaminen. Lasketaan annetuista tiedoista rubidiumydinten lukumäärä alkutilanteessa:

$$\frac{N_{Sr}}{N_{Rb}} = \frac{N_0 - N_{Rb}}{N_{Rb}} = \frac{N_0}{N_{Rb}} - 1 = 0,060 \Rightarrow N_0 = 1,060 N_{Rb}$$

Hajoamislain mukaan $N_{Rb} = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{½}} t}$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln \frac{N_0}{N_{Rb}}}{\ln 2} \cdot T_{½} = \frac{\ln 1,060}{\ln 2} \cdot 4,7 \cdot 10^{10}\,\mathrm{a} = 4,0 \cdot 10^{9}\,\mathrm{a}$$

21. Radioaktiivisen preparaatin aktiivisuus A voidaan määritellä yhtälöllä $A = \lambda N$, missä λ on hajoamisvakio ja N on preparaatissa olevien aktiivisten ydinten lukumäärä. Erään indiumpreparaatin aktiivisuus on tarkastelun alkuhetkellä 4 kBq. Laske preparaatin massa, kun tarkasteltavan isotoopin puoliintumisaika on 54 min ja preparaatissa aktiivisten atomien lukumäärän suhde stabiilien atomien lukumäärään on $1:10^{14}$. Mikä on preparaatin aktiivisuus 9,0 h kuluttua? (Yo k 80)

Ratkaisu:

Preparaatin aktiivisuus on alussa $A_0 = \lambda N_0 = \frac{\ln 2}{T_{½}} N_0$

Aktiivisten ydinten lukumäärä alussa on $N_0 = \frac{A_0 T_{½}}{\ln 2}$

Preparaatissa on ytimiä kaikkiaan $N_1 = \frac{N_{stabiili}}{N_{aktiivinen}} \cdot N_0 = \frac{N_{stabiili}}{N_{aktiivinen}} \cdot \frac{A_0 T_{½}}{\ln 2}$

Preparaatin massa on $m = N_1 \cdot m_{\mathrm{In}}$

$$m = \frac{N_{stabiili}}{N_{aktiivinen}} \cdot \frac{A_0 T_{½}}{\ln 2} \cdot m_{\mathrm{In}}$$

$$= \frac{10^{14} \cdot 41 \cdot 10^{3}\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 54 \cdot 60\,\mathrm{s} \cdot 115\,\mathrm{u} \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{u}}}{\ln 2} = 4,0\,\mathrm{g}$$

Preparaatin aktiivisuus 9,0 h kuluttua:

$$A = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{½}} t} = 41 \cdot 10^{3}\,\mathrm{Bq} \cdot 2^{-\frac{9,0\,\mathrm{h}}{0,90\,\mathrm{h}}} = 40\,\mathrm{Bq}$$

22. Hiilidioksidin mukana joutuu elävään organismiin kosmisen säteilyn synnyttämää radioaktiivista isotooppia $^{14}\mathrm{C}$, jonka puoliintumisaika on 5600 a. (Oletetaan, että) $^{14}\mathrm{C}$-ytimien ja stabiilien $^{12}\mathrm{C}$-ytimien lukumäärien suhde on elävässä organismissa vakio. Organismin kuollessa sen hiilidioksidin saanti loppuu, ja $^{14}\mathrm{C}$-pitoisuus alkaa vähetä hajoamisen vuoksi.
a) Täydennä asiaan liittyvät yhtälöt

$$^{14}_{7}\mathrm{N} + \mathrm{n} \rightarrow {}^{14}_{6}\mathrm{C} + \_\_\_$$

$$^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow \_\_\_\_ + \mathrm{e}^{-}\ \_\_\_$$

b) Elävästä organismista otettu hiilinäyte, jonka massa on 1,0 g, lähettää 14 β^{-}-hiukkasta minuutissa ja tutkittava 1,0 g näyte 12 β^{-}-hiukkasta minuutissa. Laske näytteen ikä. (Yo k 83)

Ratkaisu:
a)

$$^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{14}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{1}\mathrm{p}$$

$$^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e} + {}^{0}_{0}\overline{\nu}$$

b) Hajoamislain mukaan aktiivisuus pienenee eksponentiaalisesti noudattaen yhtälöä

$$A = A_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{½}} t}$$

$$\Rightarrow t = \frac{T_{½} \ln \frac{A_0}{A}}{\ln 2} = \frac{5600\ \mathrm{a} \cdot \ln \frac{14}{12}}{\ln 2} = 1200\ \mathrm{a}$$

23. Teräksisen männänrenkaan massa on 25 g. Sitä säteilytetään tutkimusreaktorissa, kunnes sen aktiivisuus on 330 MBq. Aktiivisuus aiheutuu raudan isotoopista $^{59}\mathrm{Fe}$, jonka puoliintumisaika on 45 vuorokautta. Männänrengas asennetaan moottoriin ja 12 vuorokauden kuluttua männänrenkaan alkuaktiivisuusmittauksen jälkeen 200 cm^3 voiteluöljynäytteen $^{59}\mathrm{Fe}$- aktiivisuudeksi mitataan 980 Bq. Kuinka monta grammaa rengas on kulunut, kun moottorissa oli öljyä testin alkaessa 7,6 litraa.

Ratkaisu:
Männänrenkaan aktiivisuus 12 vuorokauden kuluttua on

$$A = A_0 e^{-\lambda t} = 330\ \mathrm{MBq} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{45\ \mathrm{d}} \cdot 12\ \mathrm{d}} = 273{,}85\ \mathrm{MBq}$$

Öljyn aktiivisuus 12 vuorokauden kuluttua on $A_ö = \frac{7{,}6\ \mathrm{l}}{0{,}200\ \mathrm{l}} \cdot 980\ \mathrm{Bq} = 37240\ \mathrm{Bq}$

Öljyyn kuluneen männänrenkaan massa saadaan mitattujen aktiivisuuksien suhteena:

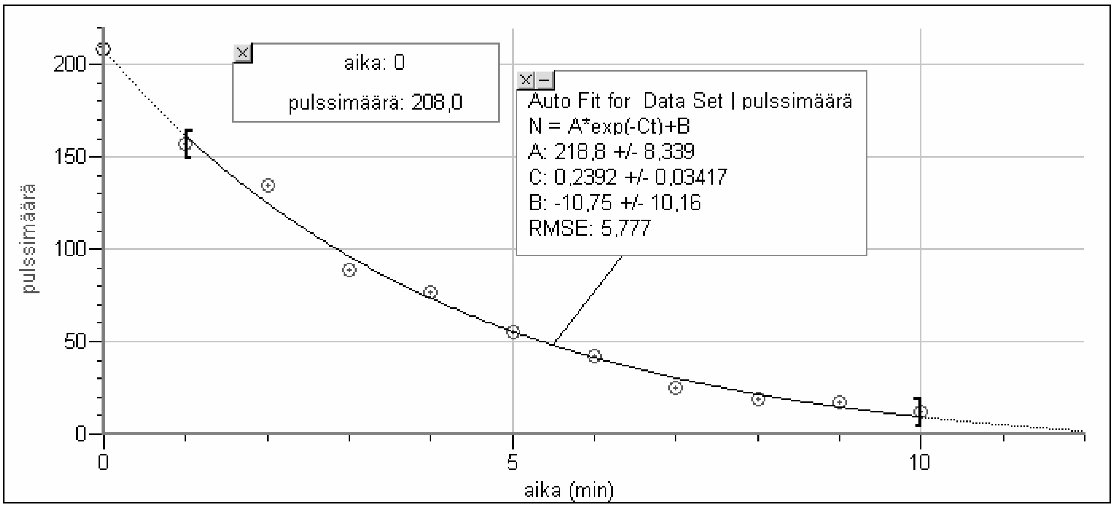
$$\frac{A_ö}{A} \cdot m = \frac{37\ 240\ \text{Bq}}{273{,}85 \cdot 10^6\ \text{Bq}} \cdot 25\ \text{g} \approx 3{,}4\ \text{mg}$$

24. Opiskelijat määrittivät cesiumpreparaatista uutetun lyhytikäisen Ba ytimen puoliintumisaikaa. Mittaus suoritettiin geigerlaskurilla minuutin välein ja mittaustulokset kirjattiin ylös jolloin saatiin oheiset tulokset:

t/min	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
pulssit	157	135	89	77	55	42	25	19	17	12

a) Kuinka suuri pulssimäärä oli mittauksen alkuhetkellä?
b) Piirrä mittaustuloksista kuvaaja sopivaan koordinaatistoon ja määritä tutkitun Ba ytimen puoliintumisaika.

Ratkaisu:
a) Piirretään pulssimäärä ajan funktiona ja ekstrapoloidaan kuvaajaa ajanhetkeen 0 s.



Luetaan kuvaajasta pulssimääräksi 208.

b) Lasketaan pulssimäärien luonnollinen logaritmi ja piirretään ln *N* ajan funktiona:

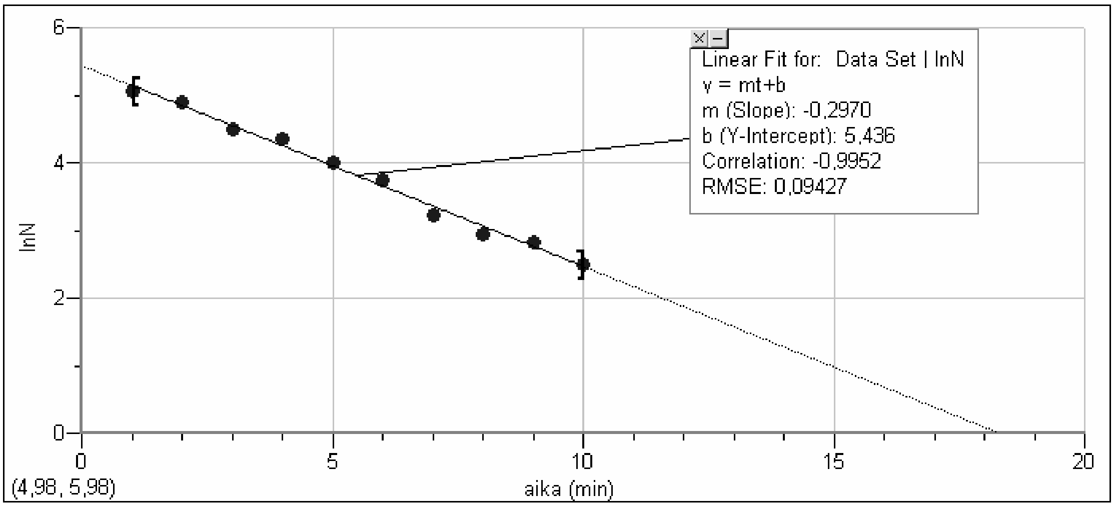
t(min)	*N*	ln *N*
1	157	5,05624580535
2	135	4,90527477844
3	89	4,48863636973
4	77	4,34380542185
5	55	4,00733318523
6	42	3,73766961828
7	25	3,21887582487
8	19	2,94443897917
9	17	2,83321334406
10	12	2,48490664979

Hajoamislain mukaan pulssimäärät ovat $N = N_0 e^{-\lambda t}$, missä λ on hajoamisvakio.

Otetaan puolittain luonnollinen logaritmi, jolloin saadaan:

$$\ln N = \ln N_0 - \lambda t$$

Piirtämällä laskentataajuuden logaritmi ajan funktiona saadaan suora, jonka fysikaalisen kulmakertoimen $\dfrac{\Delta \ln N}{\Delta t}$ = -0,2970 1/min vastaluku on hajoamisvakio λ.



Puoliintumisajaksi saadaan

$$T_{1/2,1} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{0{,}2970} \text{min} = 2{,}33\,\text{min} \approx 2{,}3\,\text{min}$$

25. Cassini avaruusalus laukaistiin Maasta lokakuussa 1997. Se saavutti Saturnuksen syyskuussa 2004. Cassinin energianlähteenä oli 33 kg plutoniumin isotooppia ^{238}Pu.
a) Kuinka paljon energiaa saatiin yhdestä kilogrammasta ^{238}Pu, kun yhden ytimen hajoamisessa syntyvän alfahiukkasen energia on 5,5 MeV?
b) Kuinka suuri teho oli Cassinilla käytettävissään sen saapuessa Saturnukseen?

Ratkaisu:
a) 1 kg:ssa plutoniumia on plutoniumytimiä

$$\frac{1{,}0\text{ kg}}{238 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{27}\,\text{kg / ydin}} = 2{,}53 \cdot 10^{24}\,\text{kpl}$$

Niiden hajoamisessa saadaan energiaa

$$2{,}53 \cdot 10^{24} \cdot 5{,}5 \cdot 10^{6}\,\text{eV} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\frac{\text{J}}{\text{eV}} = 2{,}23 \cdot 10^{12}\,\text{J} \approx 2{,}2\text{ TJ}$$

b) Aktiivisuus on $\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N = \lambda \cdot N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{0,5}}}$

Plutoniumydinten lukumäärä aluksen saapuessa Saturnukselle on

$$N = m\frac{N_A}{A} \cdot 2^{-\frac{t}{T_{0,5}}} = 33 \cdot \frac{6,022 \cdot 10^{26}}{238} \cdot 2^{-\frac{7}{88}} = 7,9019 \cdot 10^{25}$$

Plutoniumin hajoamisvakio on

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{0,5}} = \frac{\ln 2}{88 \cdot 365,25 \cdot 24 \cdot 3600} = 2,496 \cdot 10^{-10}\ \text{1/s}$$

Cassinin käytettävissä oleva teho Saturnuksella on

$$P = \lambda \cdot N \cdot E_\alpha = 2,496 \cdot 10^{-10} \frac{1}{s} \cdot 7,9019 \cdot 10^{25} \cdot 5,5 \cdot 10^6 \cdot 1,6022 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$
$$= 1,7380 \cdot 10^4\ \text{W} \approx 17\ \text{kW}$$

26. Uraanin isotooppien ^{238}U ja ^{235}U suhteellinen osuus on luonnossa 99,28% ja 0,72%. Oletetaan, että kumpaakin isotooppia muodostui yhtä paljon supernovan räjähdyksessä. Kuinka pitkä aika on kulunut tuosta räjähdyksestä?

Ratkaisu:
Oletetaan, että kumpaakin isotooppia muodostui yhtä paljon supernovan räjähdyksessä. Nuklidien puoliintumisajat ovat

U_{235}: $7,038 \cdot 10^8$ a; U_{238}: $4,468 \cdot 10^9$ a

Hajoamislain mukaan jäljellä olevien ydinten määrä räjähdyksen jälkeen on

$$N = N_0 \exp\left(\frac{-\ln 2}{T_{1/2}} t\right)$$

Isotooppien ^{238}U ja ^{235}U suhteellinen osuus, kun kumpaakin on alkuhetkellä N_0' on

$$\frac{N_{235}}{N_{238}} = \exp\left(\left(\frac{-\ln 2}{T_{1/2,235}} - \frac{-\ln 2}{T_{1/2,238}}\right)t\right) \approx \frac{0,72}{99,28}$$

Tästä saadaan räjähdyksestä kulunut aika $t = 5,9 \cdot 10^9$ a eli noin 6 miljardia vuotta.

Luku 7

Kuinka suuri energia fotonilla (säteilykvantilla) tulee vähintään olla, jotta elektroni-positronipari voisi muodostua? (Yo k 73, osa tehtävää)

Ratkaisu:
Fotonin energian pitää riittää kahden elektronin massaisen hiukkasen synnyttämiseen, joten energian alaraja on

$$E = 2m_e c^2 = 2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \cdot \left(3{,}00 \cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 1{,}64 \cdot 10^{-13}\,\text{J} = 1{,}02\ \text{MeV}$$

28. Sveitsiin on valmistumassa maailman suurin hiukkaskiihdytin LHC (Large Hadron Collider), jonka on suunniteltu käynnistyvän vuonna 2007.
a) Mitä suurilla hiukkaskiihdyttimillä pyritään tutkimaan? (1 p.)
b) Selosta hiukkasten kiihdyttämisen ja ohjaamisen yleisiä periaatteita. (4 p.)
c) Miksi hyvin suuriin hiukkasenergioihin pyrittäessä rengaskiihdyttimien halkaisijan täytyy olla kilometrien suuruusluokkaa? (2 p.)
d) Miksi kaikki suuret kiihdyttimet ovat ns. törmäyttimiä, joissa kaksi vastakkaisiin suuntiin etenevää samanmassaisten hiukkasten suihkua törmää toisiinsa? (2 p.)
(YO s 06 jokeri)

Ratkaisu:
Vastauksessa tulee ilmetä ainakin seuraavat osiot. Jos jokin seikka jää mainitsematta, voi jonkin toisen kohdan syvällinen ja perusteellinen tarkastelu korvata puutteen.

a) Alkeishiukkaset, aineen perusrakenne, luonnon perusvoimat, maailmankaikkeuden synnyn alkuvaiheet.

b) Varattujen hiukkasten kiihdyttäminen sähkökentällä: energiaperiaate $QU = E_k$, jossa U on kiihdytysjännite, Q on varaus.
Varattujen hiukkasten ohjaaminen sähkökentällä: $\overline{F} = Q\overline{E}$.
Varattujen hiukkasten ohjaaminen magneettikentällä: $F = BQv$.

c) Kun hiukkasten nopeus on lähes valon nopeus, massan kasvaessa suhteellisuusteorian mukaisesti magneettikentän voima ei pysty pitämään hiukkasta radalla, jos säde on pieni. $F = m\dfrac{v^2}{r}$, jossa $v \approx c$.

d) Liikemäärän säilymislain mukaan samanmassaisten hiukkasten törmätessä toisiinsa koko liike-energia voidaan käyttää ydinreaktioihin.

29. Pentakvarkin massaksi arvioidaan noin 1550 MeV/c^2. Se koostuu luultavasti kvarkeista uudd$\overline{\text{s}}$. Voidaanko olettaa, että systeemin massa tulee kvarkkien epärelativistisesta liike-energiasta, kun ne liikkuvat alueessa, jonka koko on a? u:n massa on 3 MeV/c^2, d:n on 6 MeV/c^2 ja s:n noin 100 MeV/c^2. Kuinka suuri pitää

alueen a olla? Oletetaan, että energia jakautuu kvarkkien kesken lepomassojen suhteessa.

Ratkaisu:
Määritellään:
Em = pentakvarkin lepoenergia = massaa vastaava energia = 1550 MeV

$E_{\mathrm{u}}, E_{\mathrm{d}}, E_{\mathrm{s}}$ = kvarkkien massoja vastaavat lepoenergiat

Oletetaan, että kvarkin liikemäärä, kun se suljetaan alueeseen a, on Heisenbergin epämääräisyysrelaation mukainen

$$p = \frac{\hbar}{a}$$

Jos kvarkin massa on m, sen epärelativistinen liike-energia on

$$E_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} = \frac{\hbar^2 c^2}{2Ea^2}$$

Oletetaan ensin, että kukin kvarkki liikkuu samankokoisessa alueessa. Pentakvarkin lepoenergia on tämän mukaan

$$E_m = 2\frac{\hbar^2 c^2}{2E_{\mathrm{u}}a^2} + 2\frac{\hbar^2 c^2}{2E_{\mathrm{d}}a^2} + \frac{\hbar^2 c^2}{2E_{\mathrm{s}}a^2} = \frac{\hbar^2 c^2}{2a^2}\left(\frac{2}{E_u} + \frac{2}{E_d} + \frac{1}{E_s}\right)$$

Tästä ratkaistaan alueen laajuus a:

$$a = \hbar c\sqrt{\frac{1}{2E_m}\left(\frac{2}{E_u} + \frac{2}{E_d} + \frac{1}{E_s}\right)}$$

$$= 1{,}054\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}\cdot 2{,}998\cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\frac{1}{1{,}602\cdot 10^{-13}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{MeV}}}\sqrt{\frac{1}{3100\,\mathrm{MeV}}\left(\frac{2}{3\ \mathrm{MeV}} + \frac{2}{6\ \mathrm{MeV}} + \frac{1}{100\ \mathrm{MeV}}\right)}$$

$$\approx 3{,}6\cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$$

Kunkin kvarkin liike-energia on

$$E_{k\mathrm{u}} = \frac{p^2}{2m_{\mathrm{u}}} = \frac{\hbar^2}{2m_{\mathrm{u}}a^2} = \frac{\hbar^2 c^2}{2E_{\mathrm{u}}a^2} = 512\,\mathrm{MeV}$$

$$E_{k\mathrm{d}} = \frac{p^2}{2m_{\mathrm{d}}} = \frac{\hbar^2}{2m_{\mathrm{d}}a^2} = \frac{\hbar^2 c^2}{2E_{\mathrm{d}}a^2} = 256\,\mathrm{MeV}$$

$$E_{k\mathrm{s}} = \frac{p^2}{2m_{\mathrm{s}}} = \frac{\hbar^2}{2m_{\mathrm{s}}a^2} = \frac{\hbar^2 c^2}{2E_{\mathrm{s}}a^2} = 15\ \mathrm{MeV}$$

Kun lasketaan yhteen kvarkkien liike-energiat, saadaan

$$E_m = 2E_{k\mathrm{u}} + 2E_{k\mathrm{d}} + E_{k\mathrm{s}} = 1550\,\mathrm{MeV}$$

Mutta tämä ei pidä yhtä lähtöoletuksen kanssa, jonka mukaan energiat jakautuvat kvarkkien lepoenergioiden suhteen. Suoritetaan lasku uudestaan tämän oletuksen puitteissa. Siitä saadaan

$$2E_{k\mathrm{u}} + 2E_{k\mathrm{d}} + E_{ks} = E_m$$

Määritellään verrannollisuustekijä k:

$$E_{k\mathrm{u,d,s}} = kE_{\mathrm{u,d,s}}$$

Tästä saadaan

$$k\left(2E_{m\mathrm{u}} + 2E_{m\mathrm{d}} + E_{ms}\right) = E_m;$$

$$k = \frac{E_m}{2E_{m\mathrm{u}} + 2E_{m\mathrm{d}} + E_{ms}}$$

Näin saadaan kunkin kvarkin liike-energialle lauseke

$$E_k = kE = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 c^2}{2a^2 E}$$

Tästä ratkaistaan alueen koko a joka antaa massaan verrannollisen liike-energian:

$$a = \frac{hc}{E\sqrt{2k}}$$

Kun sijoitetaan eri kvarkkien lepoenergiat, saadaan alueiden leveydet:

$$a_d \approx 1{,}3 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{m},\ a_u \approx 6{,}4 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}, a_s \approx 3{,}8 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{m}$$

Nämä ovat kyllä karkeasti nukleonien koon suuruusluokkaa. Tosin u ja d liikkuvat alueessa, joka on paljon isompi kuin nukleoni. Luultavasti voidaan olettaa, että pentakvarkki olisi suurin piirtein nukleonin kokoinen. Tosin tässä mallissa niiden kineettinen energia olisi paljon suurempi kuin lepoenergia, joten epärelativistinen malli ei toimi.