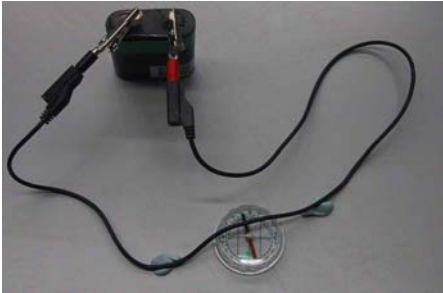


6. Kertaustehtävien ratkaisut

Luku 1

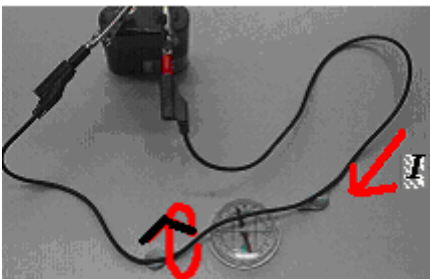
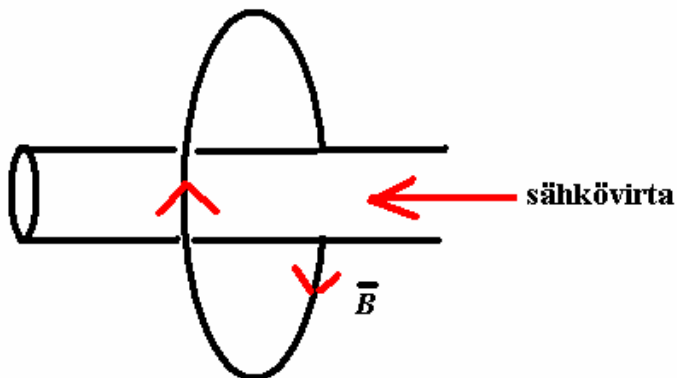
1. Oheisessa kuvassa on kompassineulan punainen pohjoisnapa osoittaa alaspäin.

- Mikä johtimen ympärille muodostuvan magneettikentän suunta?
- Mikä on johtimessa kulkevan sähkövirran suunta?
- Minkä suuntainen voima kohdistuu magneettikentässä olevaan johdetankoon?

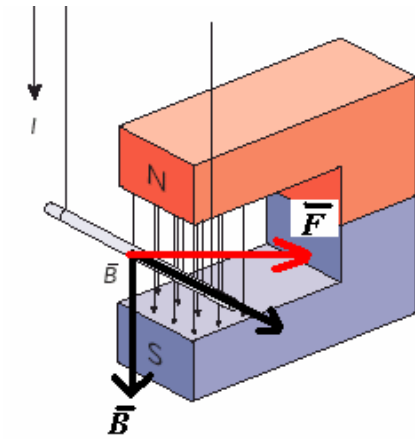


Ratkaisu:

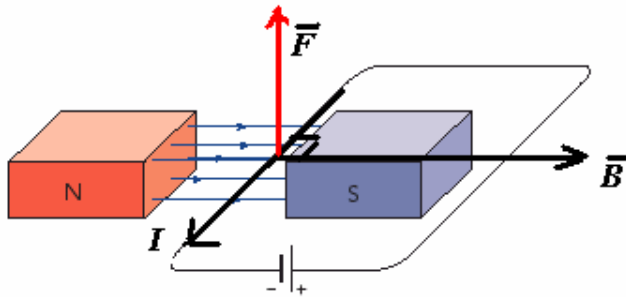
a) ja b) Kompassineulan pohjoispää osoittaa kuvassa alasään, jolloin magneettikentän suunta on oikean käden säännön mukaan kuvan mukainen:



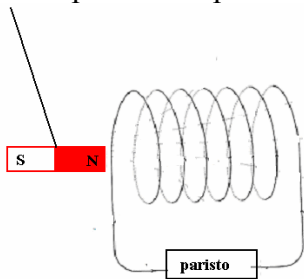
c) Oikean käden säännön mukaan voiman suunta on kohti magneetin ”sisäosaa”.



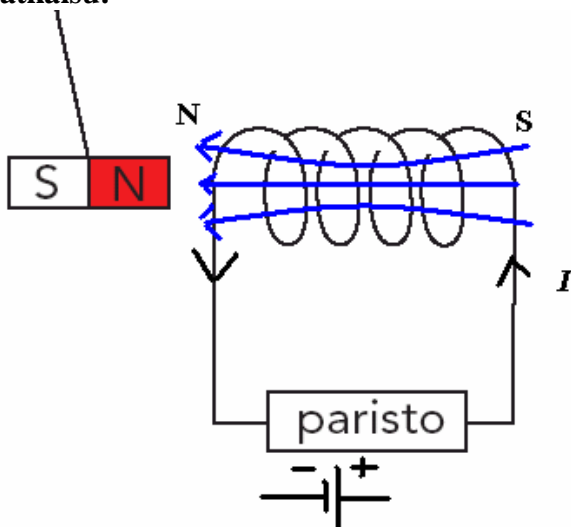
d) Oikean käden säännön mukaan voiman suunta on ylös.



2. Langassa riippuva kestopagneetti tuodaan paristoon kytketyn käämin lähelle. Päättelä pariston napaisuus ja käämissä kulkevan sähkövirran suunta.



Ratkaisu:



3. Maan magneettikentän magneettivuon tiheys eräällä seudulla on $49 \mu\text{T}$, inkliinaatio 71° ja deklinaatio 0° . Kentässä on $0,50 \text{ m}$ pitkä pystysuora johtimen osa, jossa kulkee $4,0 \text{ A}$ virta alaspäin. Määritä magneettikentän aiheuttama voima, joka vaikuttaa johtimeen. Piirrä kuvio. (Yo k 77)

Ratkaisu:

Määritellään

$B =$ magneettivuon tiheys $= 49 \mu\text{T}$

$\varphi =$ inkliinaatio $= 71^\circ$

$l =$ johtimen pituus $= 0,50 \text{ m}$

$I =$ johtimessa kulkeva virta

Johtimeen vaikuttava voima on

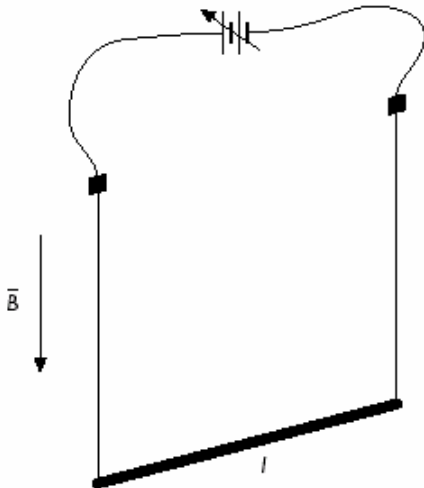
$$F = BIl \cos \varphi = 49 \mu\text{T} \cdot 4,0\text{T} \cdot 0,50\text{m} \cdot \cos 71^\circ = 32 \mu\text{N}$$

Huomaa, että johtimen ja magneettikentän välinen kulma onkin $90 - \varphi$, joten $\sin(90 - \varphi) = \cos \varphi$.

4. Oheisen kuvion mukaisesti kevyt virtajohtin, jonka pituus on 12 cm ja massa $6,0 \text{ g}$ on kohtisuorassa asennossa homogeenisessa magneettikentässä magneettikentän voimaviivoja vastaan. Kun virta kytketään, havaitaan virtajohtimen heilahtavan sivulle.

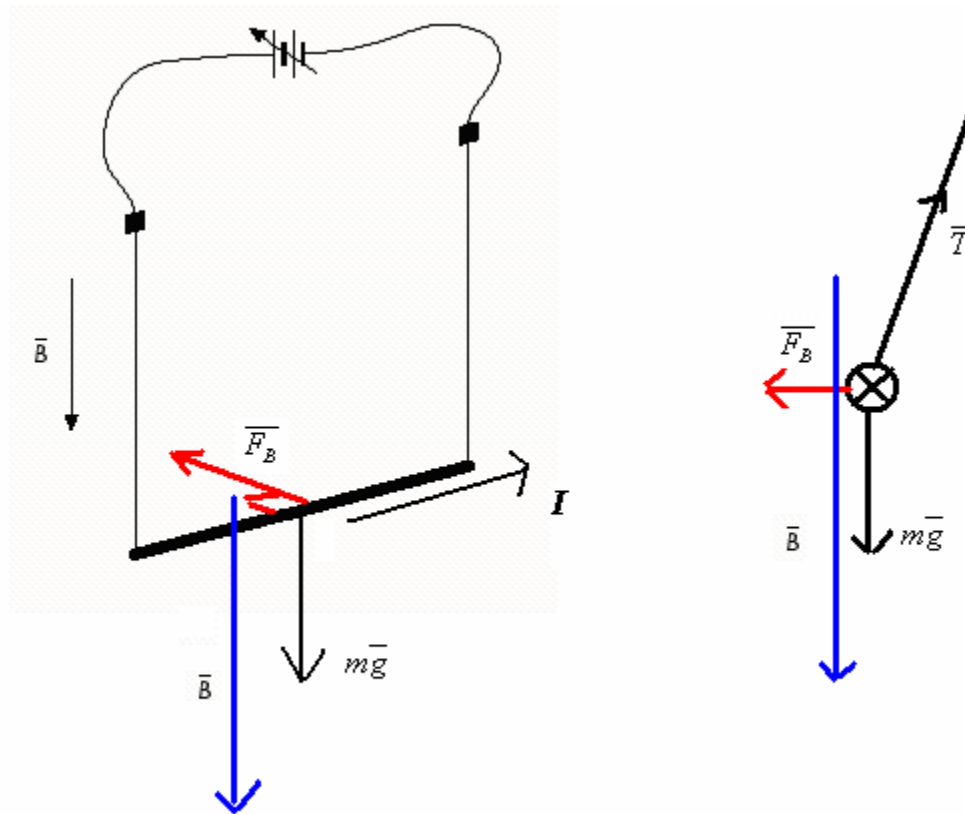
a) Piirrä kytkentähetkellä johtimeen vaikuttavat voimat.

b) Kun johtimen läpi kulki kytkentähetkellä $1,2 \text{ A}$ virta, havaittiin johtimen asennon poikkeavan pystysuorasta suunnasta 35° . Kuinka suuri oli magneettivuon tiheys?



Ratkaisu:

a) Johtimeen vaikuttavat voimat ovat painovoima $m\vec{g}$ alaspäin, virtajohtojen tukivoima \vec{T} sekä magneettikentän voima \vec{F}_B .



Koska virran suunta johtimessa on vasemmalta oikealle, saadaan oheinen voimakuvio.

Kuvion merkinnöin saadaan positiiviset suunnat huomioiden

$$\begin{aligned} T_x - F_B &= 0 \\ T_y - mg &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{eli } \Leftrightarrow \begin{cases} T \sin 35^\circ = F_B \\ T \cos 35^\circ = mg \end{cases} \Rightarrow \frac{F_B}{mg} = \tan 35^\circ$$

Johtimeen vaikuttavan magneettisen voiman suuruus on $F_B = BIl$, jossa

B = magneettivuon tiheys

I = johtimessa kulkeva sähkövirta

l = johtimen pituus

Tällöin saadaan magneettivuon tiheydeksi

$$BIl = mg \tan 35^\circ \Rightarrow B = \frac{mg \tan 35^\circ}{Il} = \frac{6,0 \cdot 10^{-3} \text{ g} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \tan 35^\circ}{1,2 \text{ A} \cdot 0,12 \text{ m}} = 0,286 \text{ T} \approx 0,29 \text{ T}$$

5. 55 kV jännitteellä kiihdytetyt $^{63}\text{Cu}^{2+}$ -ionit tulevat kohtisuorasti homogeeniseen magneettikenttään, jonka magneettivuon tiheys on 0,32 T. Magneettivuon tiheyttä ja ionien nopeutta vastaan kohtisuoraan asetetaan sähkökenttä. Kuinka suuri on sähkökentän voimakkuuden oltava, jotta ionisuihku ei poikkeaisi alkuperäisestä suunnastaan? Piirrä kuvio. Ionin massa on $1,0 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$. (Yo k 74)

Ratkaisu:

Määritellään

$$U = \text{kiihdytysjännite} = 55 \text{ kV}$$

$$q = \text{ionin varaus} = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ As}$$

$$B = \text{magneettivuon tiheys} = 0,32 \text{ T}$$

$$m = \text{ionin massa} = 1,0 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$$

 $v = \text{ionin nopeus}$ $E = \text{sähkökentän voimakkuus}$

Ioni tulee kohtisuoraan magneettikenttää vastaan, joten siihen vaikuttava magneettinen voima on

$$F_m = qvB$$

Vastakkaiseen suuntaan vaikuttaa sähköinen voima

$$F_e = eE$$

Kokonaisvoima on nolla kun ioni liikkuu suoraviivaisesti:

$$F = F_m - F_e = qvB - qE = 0$$

Tästä ratkaistaan tarvittava sähköinen kenttävoimakkuus:

$$E = vB$$

Ionin kineettinen energia on

$$E_k = qU = \frac{1}{2}mv^2$$

Tästä ratkaistaan nopeus:

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$

Tarvittava sähkökentän voimakkuus on siis

$$E = vB = B\sqrt{\frac{2qU}{m}} = 190 \text{ kV/m}$$

6. Åbo Akademin syklotronissa kiihdytetään kevyitä heliumioneja (${}^3\text{He}^{2+}$), jolloin niiden suurin liike-energia on 27 MeV. Hiukkasten radan suurin säde on 1,03 m. Laske hiukkasen kiihdyttämisessä käytetyn magneettivuon tiheys ja syklotronitaajuus (hiukkasten kierrostaajuus). (Yo k 75)

Ratkaisu:

Määritellään

$$E_k = \text{ionien liike-energia} = 27 \text{ MeV}$$

$$r = \text{radan säde} = 1,03 \text{ m}$$

$$q = \text{ionin varaus} = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ As}$$

$$m = \text{ionin massa} = 4,98 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Hiukkasiin vaikuttava voima on

$$F = qvB = ma_n = \frac{mv^2}{r}$$

Tästä ratkaistaan

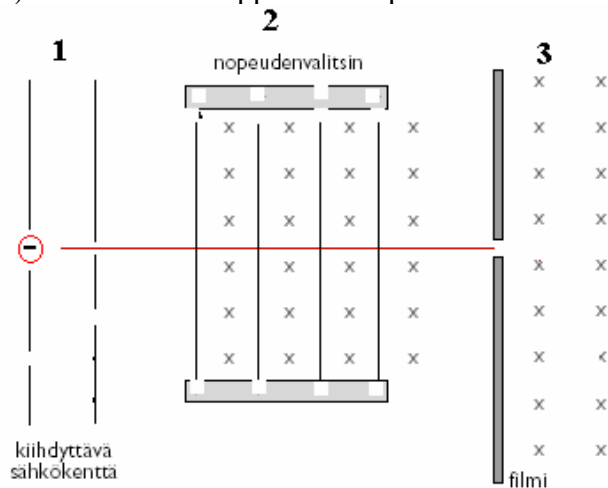
$$B = \frac{mv}{qr} = \frac{m}{qr} \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \frac{\sqrt{2mE_k}}{qr} = \frac{\sqrt{2 \cdot 4,98 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 27 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}}{3,2 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 1,03 \text{ m}} = 0,63 \text{ T}$$

Hiukkasen kierrostaajuus on

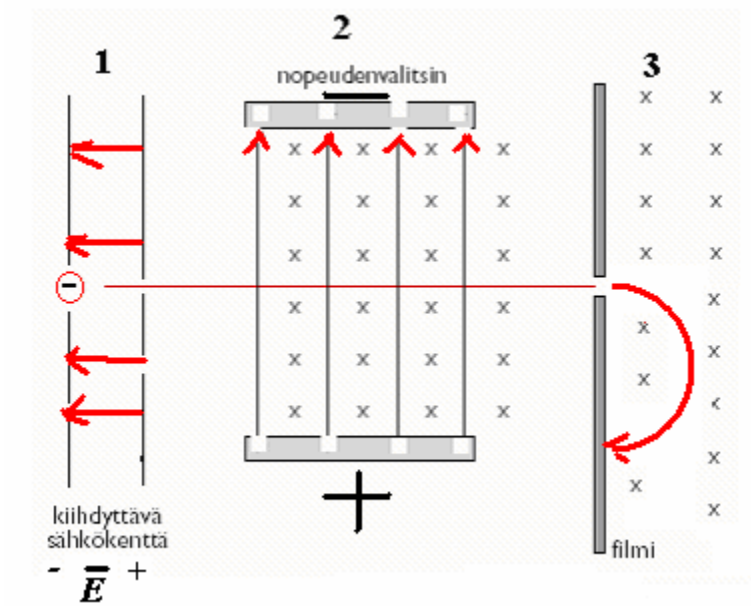
$$n = \frac{v}{2\pi r} = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{\sqrt{2mE_k}}{2\pi m r} = \frac{1}{\pi r} \sqrt{\frac{E_k}{2m}} = 6,4 \text{ Mhz}$$

7. Ohessa on massaspektrometrin kaaviokuva.

- Mikä on alueen 1 kiihdyttävän sähkökentän suunta?
- Mikä on nopeuden valitsimissa sähkökentän suunta, kun negatiivinen hiukkanen kulkee suoraan?
- Hahmottele hiukkasen rata alueessa 3.
- Miten eri isotooppien radat poikkeavat toisistaan alueessa 3?

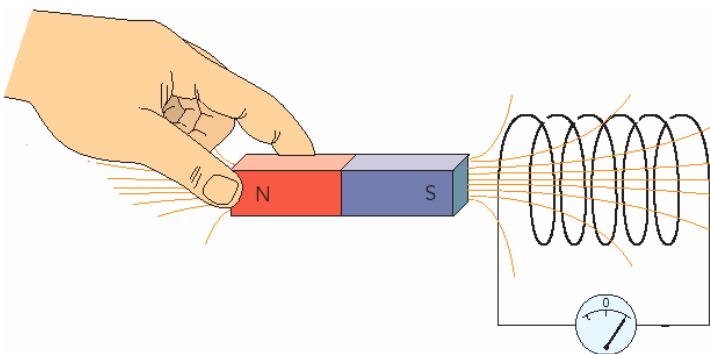
**Ratkaisu:**

- Oikealta vasemmalle.
- Alhaalta ylös.
- Puoliympyrän kaari.
- Raskaamman isotoopin radan säde on suurempi.



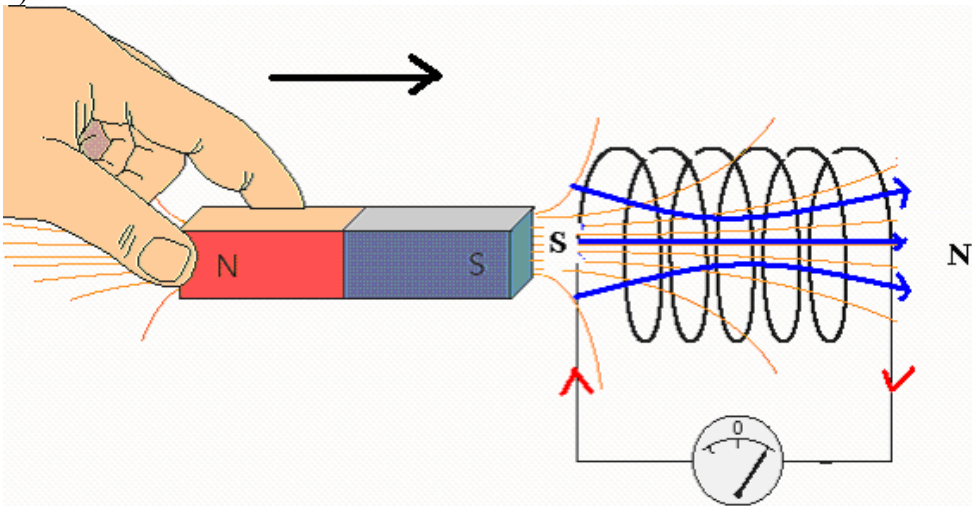
Luku 2

8. Oheisen kuvan mukaisesti kestopagneetti a) työnnetään käämiin sisään b) vedetään takaisin ulos käämistä c) työnnetään käämiin läpi kokonaan. Mikä on käämiin indusoituvan sähkövirran suunta kussakin tapauksessa?

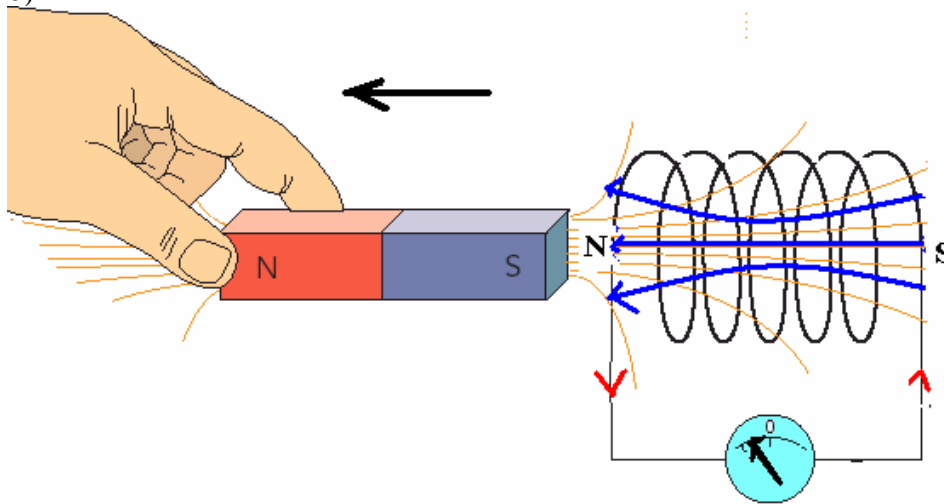


Ratkaisu:

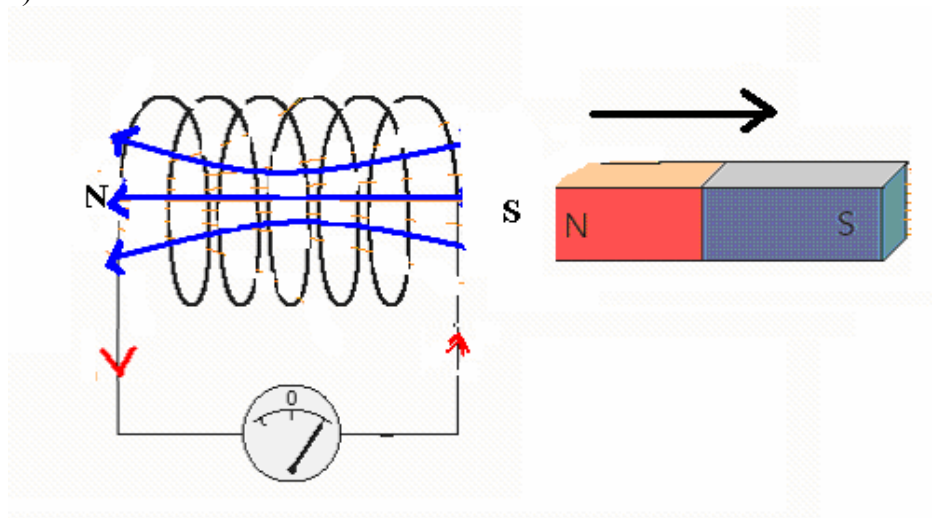
a)



b)



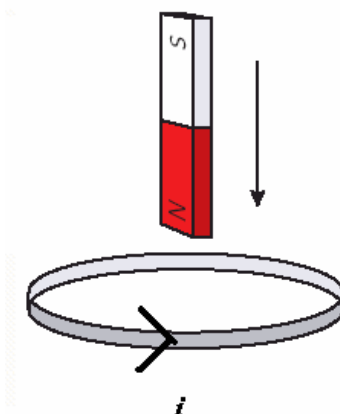
c)



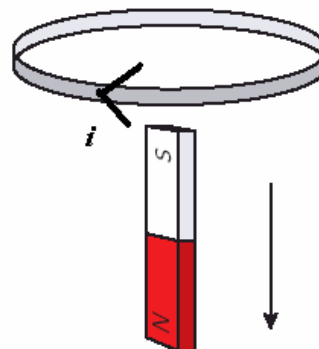
9. Alumiinirengas pudotetaan kestopagneetin läpi. Mikä on renkaaseen indusoituvan sähkövirran suunta, kun a) rengas lähestyy magneettia b) loittonee magneetista?

Ratkaisu:

a)



b)

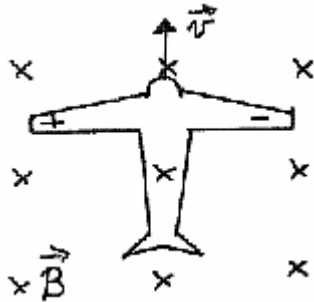


10. Kanadan pohjoisosassa sijaitsevan magneettisen navan alueella Maan magneettikentän suunta on pystysuoraan alaspäin. Lentokone, jonka siivenkärkien väli on 25 m, lentää navan yli vaakasuoraan nopeudella 680 km/h. Oletetaan, että lentokorkeudella magneettivuon tiheys on $85 \mu\text{T}$. a) Kuinka suuri on tällöin siivenkärkien välinen jännite, ja kumpi kärki on korkeammassa potentiaalissa? b) Siivenkärjet yhdistetään johtimilla herkkään jännitemittariin. Miksi mittari näyttää nollassa? (Yo k 01)

Ratkaisu:

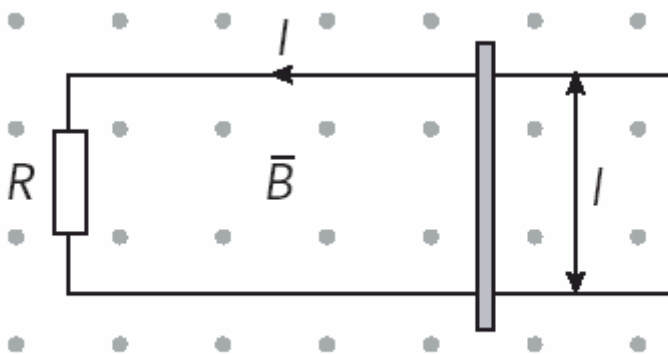
a) Koska nopeusvektori on kohtisuorassa magneettikentän voimaviivoja vastaan, siivenkärkien välille indusoituu jännite $e = lvB = 25 \text{ m} \cdot \frac{680 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} \cdot 85 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 0,40 \text{ V}$.

Siiven elektronit pyrkivät siirtymään oikean käden säännön mukaan oikeaan kärkeen. Tällöin vasen kärki on korkeammassa potentiaalissa.



b) Kun siivenkärjet yhdistetään jännitemittariin, tapahtuu jännitemittarin johtimissa myös varausten jakautuminen. Siipien ja jännitemittarin johtimien muodostaman silmukan läpäisevä magneettivuon tiheys on vakio. Tästä johtuen silmukkaan ei indusoidu jännitettä.

11. Kaksi suoraa yhdensuuntaista johdinta, joiden etäisyys on 84 mm, on yhdistetty vastuksella, jonka resistanssi on $1,8 \Omega$. Homogeeninen magneettikenttä, jonka magneettivuon tiheys on $1,35 \text{ T}$, on kohtisuorassa systeemiä vastaan. Johtimia pitkin vedetään metallisauvaa, jolloin piiriin indusoituu 81 mA virta kuvion mukaisesti.



a) Mihin suuntaan sauva liikkuu? b) Kuinka suuri on sauvan nopeus? c) Kuinka suurella johtimien suuntaisella voimalla sauva vedetään, kun sauvaan kohdistuva kitkavoima on 12 mN ? (Yo s 88)

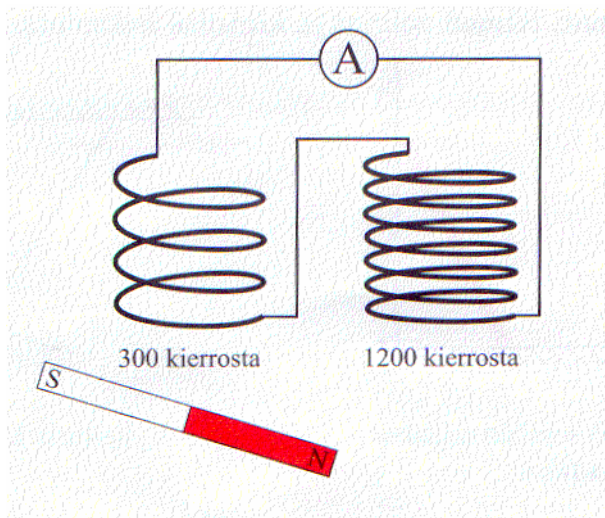
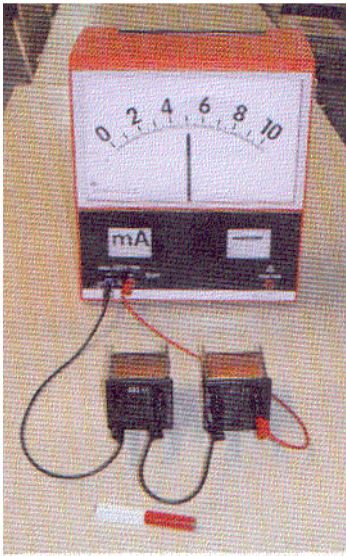
Ratkaisu:

Piiriin indusoituva jännite on $e = Blv$. Piirissä kulkeva virta on

$$I = \frac{e}{R} = \frac{Blv}{R} = \frac{0,52 \text{ T} \cdot 35 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 0,50 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{82 \Omega} = 0,11 \text{ mA}$$

Sähkövirta on positiivisten varausten liikettä. Kun positiivinen varaus liikkuu tangossa ylöspäin ja magneettikentän suunta on paperin pinnasta sisään, aiheuttaa magneettikentän voimavaikutus varauksen liikkeen. Oikean käden sormisäännön perusteella (etusormi = varauksen nopeus, suunta, johon varauksista vedetään, keskisormi = magneettikenttä, peukalo = voima, joka aiheuttaa varauksen liikkeen) saadaan virran suunta, kun sauvaa vedetään oikealle.

12. Kuvan esittämässä laitteessa on kaksi käämiä kytketty sarjaan ja yhdistetty herkkään virtamittariin. Lisäksi käytettävissä on sauvamagneetti. Mitä fysiikan perusilmiötä laitteistolla voidaan tutkia? Minkälaisia kokeita laitteistolla voidaan tehdä ilmiöön liittyvien suureiden välisten riippuvuuksien selvittämiseksi? (Yo k 05)

**Ratkaisu:**

Kuvan laitteistolla voidaan tutkia sähkömagneettista induktiota.

Kun kestopagneetin avulla muutetaan käämiin läpi kulkevaa magneettivuota, käämiin indusoituu jännite

$$e_{ind} = -N \frac{d\phi}{dt}$$

Tämä lähdejännite aiheuttaa suljetussa virtapiirissä virran

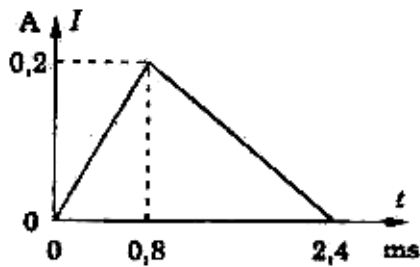
$$i = \frac{e_{ind}}{R}$$

missä R on piirin resistanssi (vakio).

Kuvan laitteistolla voidaan tutkia esimerkiksi

- magneettivuon muuttumisnopeuden vaikutusta induktiovirran suuruuteen ja sen suuntaan
- käämin kierrosluvun vaikutusta induktiovirtaan (käämin kierrosluvun ollessa nelinkertainen saadaan myös nelinkertainen virta)
- magneetin napaisuuden vaikutusta induktiovirran suuntaan.

13. a) Miten Faradayn induktiolakia soveltaen voit mitata tunnetun suuntaisen magneettikentän magneettivuon tiheyden? b) Ilmasydämisen solenoidin induktanssi on 55 mH ja resistanssi hyvin pieni. Solenoidissa kulkeva virta riippuu ajasta oheisen kuvion mukaisesti.



Esitä graafisesti solenoidin päiden välinen jännite ajan funktiona. (Yo s 96)

Ratkaisu:

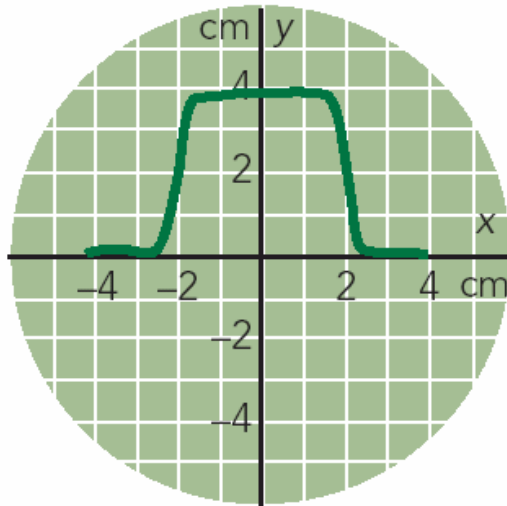
a) Soveltamalla vaihtovirtageneraattorin periaatetta, eli pyörittämällä tunnetun kokoista johdinsilmukkaa magneettikenttää vastaan kohtisuoran akselin ympäri tunnetulla kulmanopeudella ja mittaamalla silmukkaan indusoituva jännite. Jos silmukan pinta-ala on A ja kulmanopeus on ω , silmukkaan indusoituu sinimuotoinen vaihtojännite, jonka huippuarvo on $\hat{e}_{ind} = BA\omega$. Tästä saadaan magneettivuon tiheydelle lauseke $B = \frac{\hat{e}_{ind}}{A\omega}$.

b) Ratkaisu: $U = -E_{ind} = L \frac{dI}{dt} = L \frac{\Delta I}{\Delta t}$

Kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin $\frac{\Delta I}{\Delta t} = \begin{cases} \frac{0,2 \text{ A}}{0,8 \text{ ms}} = 250 \frac{\text{A}}{\text{s}} & \text{aikana } 0 \dots 0,8 \text{ ms} \\ -\frac{0,2 \text{ A}}{1,6 \text{ ms}} = -125 \frac{\text{A}}{\text{s}} & \text{aikana } 0,8 \dots 2,4 \text{ ms} \end{cases}$

joten jännite on ajan funktiona $U = \begin{cases} 13,8 \text{ V}, & \text{kun } 0 < t < 0,8 \text{ ms} \\ -6,9, & \text{kun } 0,8 \text{ ms} < t < 2,4 \text{ ms} \end{cases}$

14. Käämi, jossa on 1000 kierrosta ja jonka poikkipinta-ala on 12 cm^2 , on homogeenisessa magneettikentässä kentän suuntaisena. Sen navat on kytketty oskilloskoopin y-poikkeutukseen, jonka herkkydeksi on asetettu $1,0 \text{ V/cm}$. Oskilloskoopin x-poikkeutus on asetettu pyyhkäisylle, jonka nopeus on 20 ms/cm . Käämi nykäistään pois kentästä. Kuvaputkelta saadaan silloin oheisen kuvan mukainen valokuva. Kuinka suuri oli kentän magneettivuon tiheys?

**Ratkaisu:**

Kuvasta nähdään ensin, että indusoitunut jännite on

$$e = 1,0 \frac{\text{V}}{\text{cm}} \cdot 4 \text{ cm} = 4 \text{ V}$$

Pyyhkäisy aika on

$$t = 4 \text{ cm} \cdot 20 \frac{\text{ms}}{\text{cm}} = 80 \text{ ms}$$

Indusoitunut jännite on

$$e = \left| \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \right| = B \left| \frac{N \Delta A}{\Delta t} \right|$$

Tästä ratkaistaan magneettinen induktio:

$$B = \frac{e}{\left| \frac{N \Delta A}{\Delta t} \right|} = \frac{4 \text{ V}}{\left(\frac{1000 \cdot 0,012 \text{ m}^2}{0,08 \text{ s}} \right)} = 0,027 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$$

15. a) Käämin induktanssi.

b) Kun käämin läpi kulkeva sähkövirta pienenee tasaisesti 0,12 sekunnissa arvosta 3,6 A arvoon 0 A, käämin napoihin indusoituu 24 V jännite. Laske käämin induktanssi. Käämin resistanssi on hyvin pieni. (Yo k 82)

Ratkaisu:

Indusoituneen jännitteen ja virran muutosnopeuden välillä vallitsee yhteys

$$E = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

Tästä saadaan

$$L = -\frac{E}{\frac{\Delta I}{\Delta t}} = -\frac{24 \text{ V}}{\left(\frac{-3,6 \text{ A}}{0,12 \text{ s}}\right)} = 0,80 \text{ H}$$

16. Neliönmuotoinen johdinsilmukka on silmukan tasoa vastaan kohtisuorassa homogeenisessa magneettikentässä. Silmukan pinta-ala on $0,040 \text{ m}^2$. Ajassa $1,4 \text{ s}$ magneettivuon tiheys muuttuu lineaarisesti arvosta $0,50 \text{ T}$ arvoon $0,15 \text{ T}$. Kuinka suuri jännite silmukkaan indusoituu, ja millainen on induktiovirran suunta?

Ratkaisu:

Määritellään

$$A = \text{silmukan pinta-ala} = 0,040 \text{ m}^2$$

$$\Delta B = \text{magneettivuon tiheyden muutos} = 0,15 \text{ T} - 0,50 \text{ T} = -0,35 \text{ T}$$

$$\Delta t = \text{vastaava aika} = 1,4 \text{ s}$$

Indusoitunut jännite on

$$e = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\frac{A\Delta B}{\Delta t} = -\frac{0,040 \text{ m}^2 \cdot \left(-0,35 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}\right)}{1,4 \text{ s}} = 0,01 \text{ V} = 10 \text{ mV}$$

17. Käämin, jonka resistanssi on 12Ω ja induktanssi $0,50 \text{ H}$, läpi kulkee muuttuva tasavirta. Kun virta on $2,5 \text{ A}$, käämin päiden välinen jännite $U_{AB} = 33 \text{ V}$.



- Onko virta pienenevässä vai kasvavassa?
- Kuinka suuri on virran muuttumisnopeus? (Yo s 94)

Ratkaisu:

a) Sovelletaan Lenzin lakia, jonka mukaan käämin päiden välinen jännite U_{AB} on

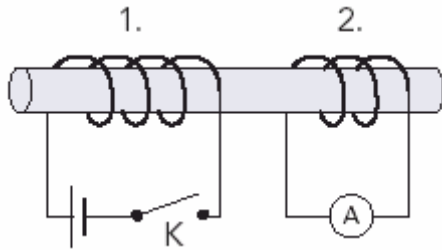
$$U_{AB} = V_A - V_B = RI - E_{ind} = RI - \left(-L \frac{dI}{dt}\right) = RI + L \frac{dI}{dt}$$

Käämin resistanssin aiheuttama jännitehäviö Ohmin lain nojalla on $U = RI = 12 \Omega \cdot 2,5 \text{ A} = 30 \text{ V}$, joka on pienempi kuin käämin päiden väliltä mitattu jännite U_{AB} . Tällöin virran muutosnopeus on positiivinen $\frac{dI}{dt} > 0$, joten virta on kasvavassa.

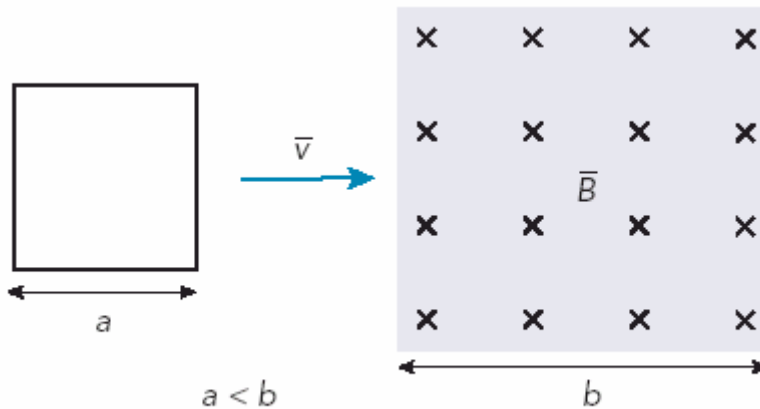
b) Edellisen kohdan perusteella saadaan $U_{AB} = RI + L \frac{dI}{dt}$, josta virran

$$\text{muutosnopeudeksi saadaan } \frac{dI}{dt} = \frac{U_{AB} - RI}{L} = \frac{33 \text{ V} - 30 \text{ V}}{0,50 \text{ H}} = 6,0 \frac{\text{A}}{\text{s}}$$

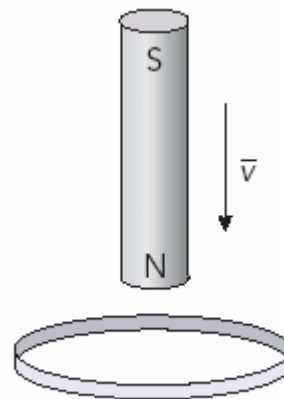
18. a) Miksi oheisen kuvion mukaisessa tilanteessa mittari A osoittaa virtaa, kun kytkin K suljetaan?



b) Suljettu johdinsilmukka kulkee vakionopeudella magneettikentän läpi oheisen kuvion mukaisesti. Esitä silmukassa kulkeva virta ajan funktiona (periaatekuvio t , I -koordinaatistossa).



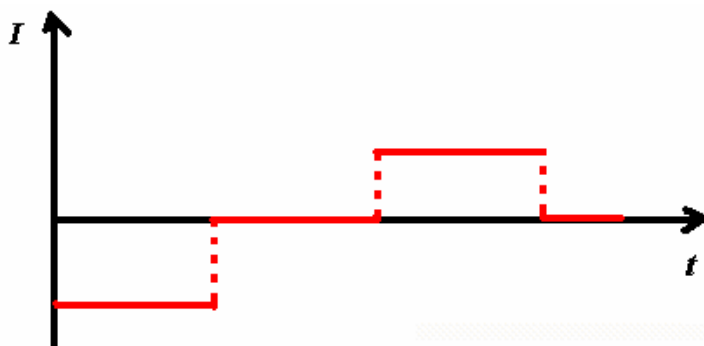
c) Mihin suuntaan virta kulkee johdinsilmukan etuosassa, kun sauvamagneetti putoaa kuvion mukaisesti silmukkaa kohti? (Yo k 91)



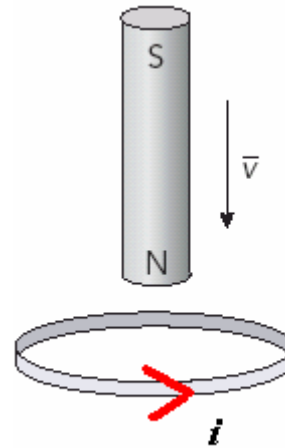
Ratkaisu:

a) Käämit ovat induktiivisesti kytkettyjä. Kun kytkin suljetaan kasvaa virta piirissä 1, jolloin muuttuva magneettikenttä lävistää myös piirin 2 käämin. Tällöin piiriin 2 indusoituu jännite, joka aiheuttaa piirissä 2 induktiovirran.

b) Kun silmukka saapuu magneettikenttään ja poistuu magneettikentästä, on magneettivuon muutos vakio. Tällöin myös virta on vakio. Kun silmukka on magneettikentässä, magneettivuon muutos ei muutu, joten virta ei kulje silmukassa. Saadaan oheinen virran kuvaaja.

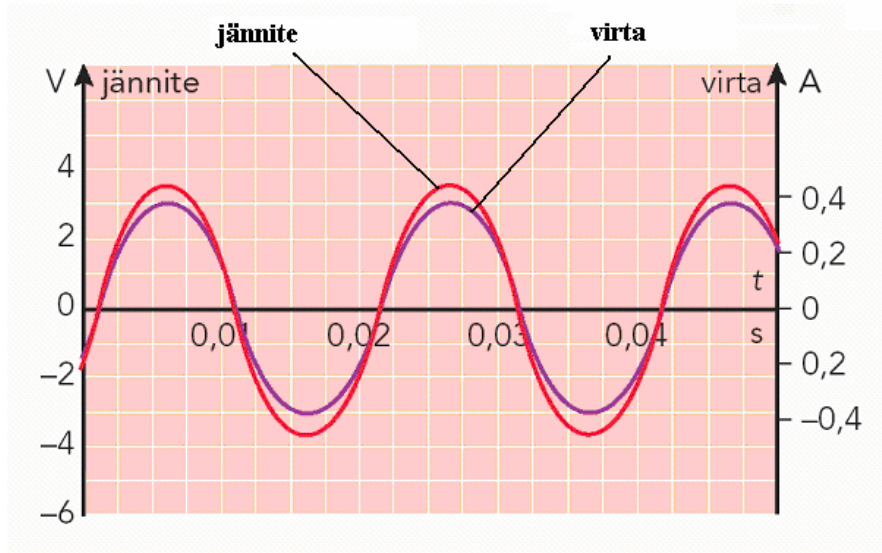


c) Sauvamagneetin pudotessa silmukkaan, kasvaa magneettivuon tiheys silmukan sisällä. Lenzin lain nojalla silmukkaan indusoituva virta synnyttää magneettikentän, joka vastustaa magneetin putoamista. Kun tartutaan silmukasta oikealla kädellä siten, että sormet osoittavat virran suunnan osoittaa peukalo syntyvän magneettivuon pohjoisnavan. Tällöin virran suunta silmukan etureunassa on oikealle.



Luku 3

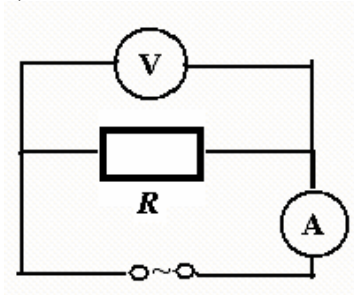
19. Vastus kytkettiin vaihtojännitelähteeseen. Vastuksen jännite ja sähkövirta mitattiin tietokoneavusteisesti, jolloin jännitteelle ja sähkövirralle saatiin oheinen kuvaaja.



- Piirrä mittauksen kytkentäkaavio.
- Mikä oli vaihtojännitteen taajuus? Kuinka suuri oli vaihtojännitteen ja -virran tehollinen arvo?
- Mikä oli mittauksen perusteella vastuksen resistanssi?

Ratkaisu:

a)



b) Taajuus saadaan lukemalla kuvaajasta kahden saman vaiheen aikaero, joka on 0,02 s. Taajuus on $f = 1/0,02\text{s} = 50\text{Hz}$.

Teholliset arvot saadaan huippuarvojen avulla:

$$\text{jännite } U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} = \frac{3,5\text{ V}}{\sqrt{2}} = 2,47\text{ V} \approx 2,5\text{ V}$$

$$\text{virta } I = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} = \frac{0,35\text{ A}}{\sqrt{2}} = 0,247\text{ A} \approx 0,25\text{ A}$$

c) Vastuksen resistanssi on $R = \frac{3,5\text{V}}{0,35\text{A}} = 10\Omega$

20. Opiskelijat tutkivat kondensaattorin ominaisuuksia vaihtovirtapiirissä. Kondensaattori kytkettiin vaihtojännitelähteeseen, jonka taajuus oli säädettävä. Kondensaattorin virta mitattiin taajuuden funktiona, jolloin saatiin oheiset mittaustulokset.

I (mA)	f (Hz)
10,8	150
17,7	250
24,3	350
30,9	450
37,5	550

Mittausten aikana jännite oli 1,1 V. Esitä graafisesti kapasitiivinen reaktanssi taajuuden käänteisarvon funktiona ja määritä kondensaattorin kapasitanssi.

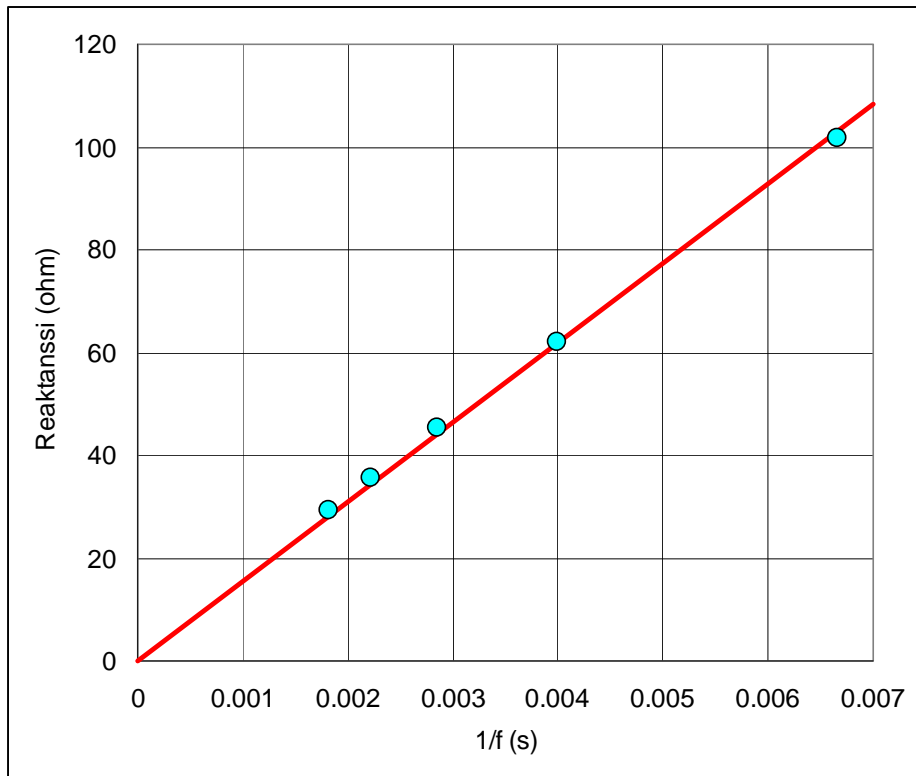
Ratkaisu:

Kondensaattorin kapasitiivinen reaktanssi on $X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi C} \cdot \frac{1}{f}$.

Lasketaan kapasitiivinen reaktanssi ja taajuuden käänteisarvo:

virta (mA)	taajuus (Hz)	reaktanssi (Ω)	1/taajuus (s)
0,0108	150	101,852	0,007
0,0177	250	62,147	0,004
0,0243	350	45,267	0,003
0,0309	450	35,599	0,002
0,0375	550	29,333	0,002

Piirretään kuvaaja ja sovitetaan mittauspisteisiin suora:



Kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin on $\frac{\Delta X_C}{\Delta \frac{1}{f}} = \frac{1}{2\pi C} = 1,49 \cdot 10^4 \frac{\Omega}{s}$.

Kapasitanssiksi saadaan $C = \frac{1}{2\pi \cdot 1,49 \cdot 10^4 \frac{\Omega}{s}} = 1,07 \cdot 10^{-5} \text{ F} \approx 11 \mu\text{F}$

Jos suora pakotetaan kulkemaan origon kautta, saadaan tulokseksi $1,02 \cdot 10^{-5} \text{ F}$.

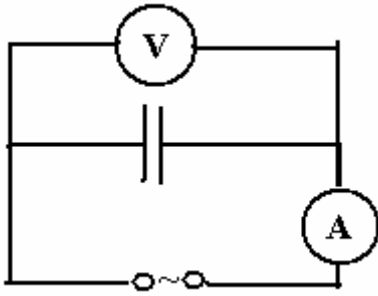
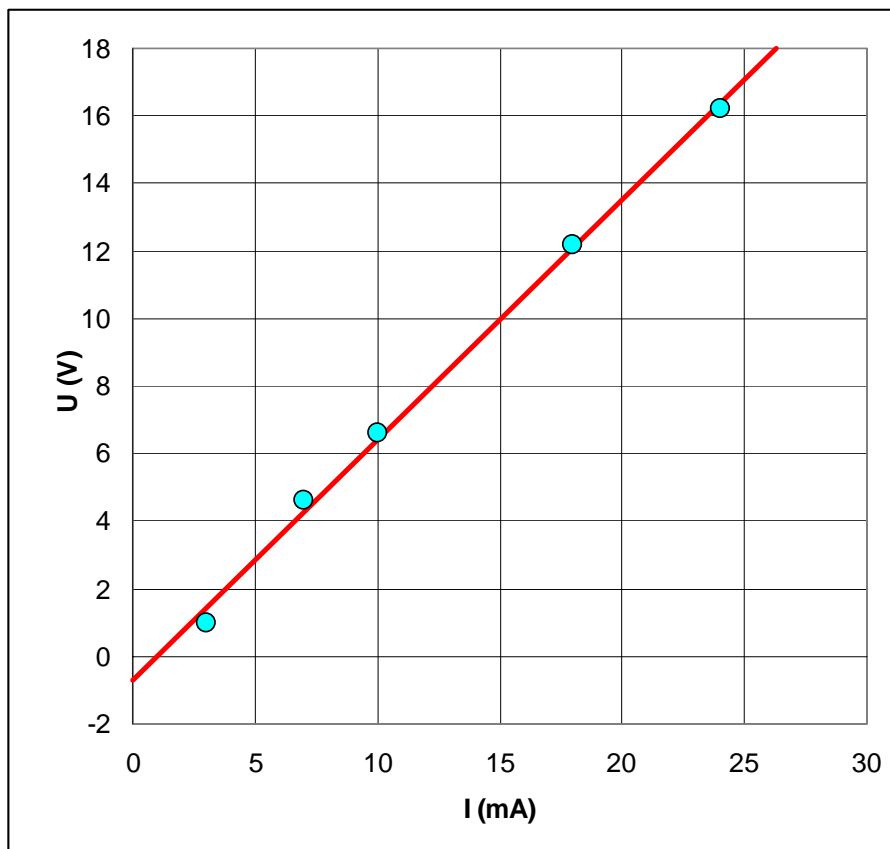
21. Vaihtojännitteen taajuuden määrittämiseksi kondensaattori, jonka kapasitanssi oli $1,0 \mu\text{F}$, kytkettiin vaihtojännitelähteeseen. Jännitelähteen jännitettä muutettiin ja kondensaattorin virta mitattiin, jolloin saatiin oheiset tulokset:

I (mA)	U (V)
3,0	1,0
7,0	4,6
10,0	6,6
18,0	12,2
24,0	16,2

- Piirrä kytkentäkaavio mittaukseen soveltuvasta kytkennästä.
- Määritä kondensaattorin kapasitiivinen reaktanssi sekä vaihtojännitteen taajuus.

Ratkaisu:

a)

b) Piirretään mittaustuloksista kuvaaja I, U -koordinaatistoon:

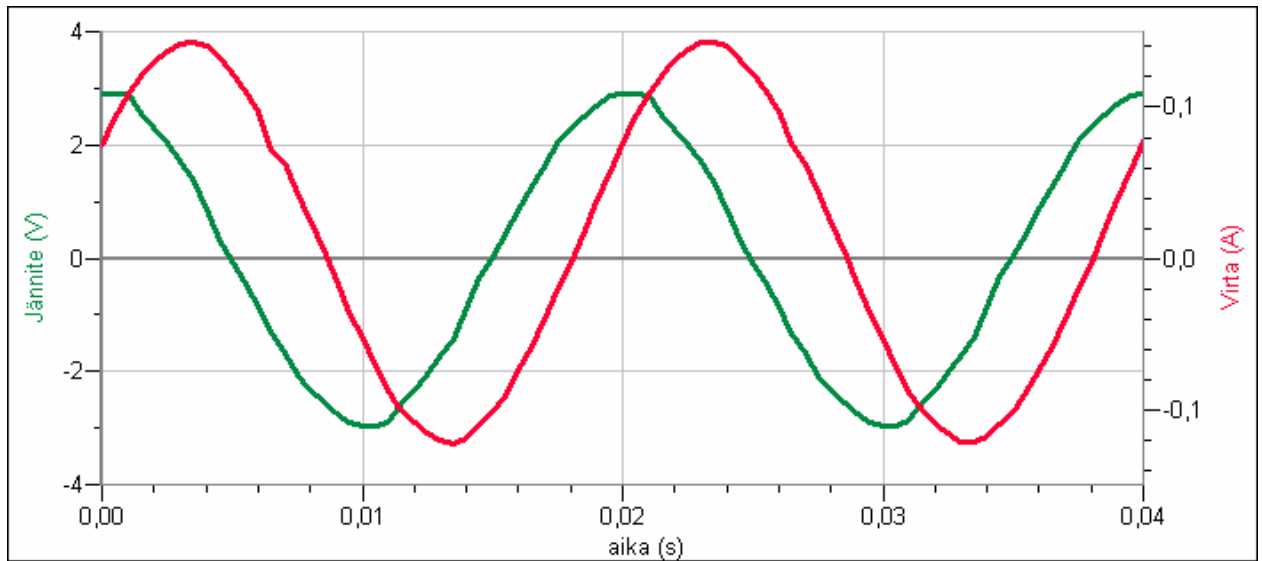
Kapasitiivinen reaktanssi saadaan kuvaajan fysikaalisena kulmakertoimena

$$X_C = \frac{\Delta U}{\Delta I} = 713 \, \Omega \approx 710 \, \Omega$$

Vaihtojännitteen taajuudeksi saadaan

$$f = \frac{1}{2\pi C X_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ F} \cdot 713 \, \Omega} \approx 223 \text{ Hz} \approx 220 \text{ Hz}.$$

22. Käämi kytkettiin vaihtojännitelähteeseen ja käämin jännite ja sähkövirta mitattiin tietokoneavusteisesti jolloin saatiin oheinen kuvaaja.



Käämin resistanssiksi mitattiin yleismittarilla 17Ω

- Kuinka suuri oli käämin impedanssi?
- Kuinka suuri oli käämin induktanssi?

Ratkaisu:

a) Luetaan arvot kuvaajista: Jännitteen huippuarvo on $\hat{u} = 3,5 \text{ V}$ ja virran huippuarvo $\hat{i} = 0,013 \text{ A}$.

$$\text{Impedanssi on } Z = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \frac{3,8 \text{ V}}{0,11 \text{ A}} = 34,5 \Omega \approx 35 \Omega$$

Jaksonaika $T = 0,02 \text{ s}$, jolloin taajuudeksi saadaan $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,02 \text{ s}} = 50 \text{ Hz}$.

b) Käämin induktanssiksi saadaan

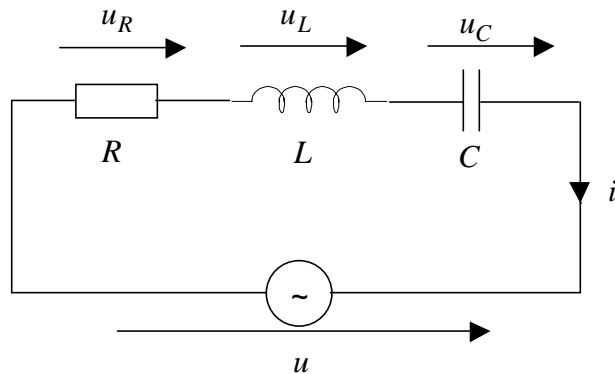
$$X_L = 2\pi fL \Rightarrow L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{34,5 \Omega}{2\pi \cdot 50 \text{ Hz}} = 0,110 \text{ H} \approx 0,11 \text{ H}.$$

23. Vastus, jonka resistanssi on $50,0 \Omega$, käämi ja säätökondensaattori, jonka kapasitanssi on $51 \mu\text{F}$, kytketään sarjaan vaihtojännitelähteeseen. Vaihtojännitteen suuruus on 230 V ja taajuus on 50 Hz .

- Piirrä kytkentäkaavio
- Kuinka suuri virta voi korkeintaan kulkea virtapiirissä?
- Mikä on tällöin käämin induktanssi?

Ratkaisu:

a)



b) Suurin virta kulkee resonanssitaajuudella, jolloin reaktanssi on nolla. Tällöin impedanssi aiheutuu pelkästään vastuksen resistanssista. Oletamme, että käämin resistanssi on hyvin pieni. Tällöin

$$Z = \frac{U}{I} \Rightarrow I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R} = \frac{230 \text{ V}}{50,0 \Omega} = 4,6 \text{ A}$$

c) Resonanssitaajuudella piirissä kulkeva virta on suurimmillaan. Tällöin impedanssi on on pienin ja aiheutuu ainoastaan piirin resistanssista. Reaktanssi on resonanssitaajuudella nolla. Tällöin saadaan

$$X_L - X_C = 0 \Rightarrow 2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC} = 0$$

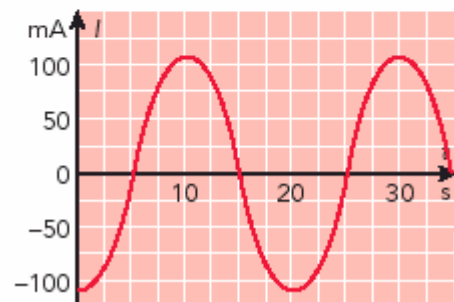
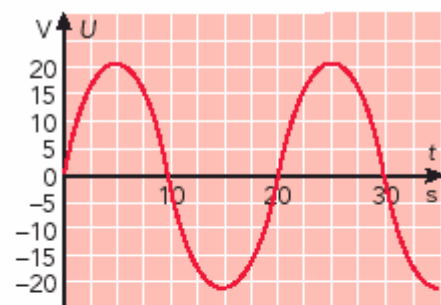
$$\Rightarrow L = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot (50 \text{ Hz})^2 \cdot 51 \cdot 10^{-6} \text{ F}} = 0,199 \text{ H} \approx 200 \text{ mH}$$

24. Oheinen kuvio esittää vaihtovirtalähteeseen kytketyn laitteen läpi kulkevaa virtaa.

a) Kuinka suuri on jännitteen ja virran välinen vaihe-ero?

b) Mistä tämä vaihe-ero johtuu?

c) Laske laitteen kuluttama keskiteho. (Yo s 91)



Ratkaisu:

a) Kuvaajasta voidaan päätellä, että jännite on edellä virtaa. Jännite saavuttaa huippuarvonsa ajan hetkellä 5,0 ms ja virta ajan hetkellä 10,5 ms. Aikaero on siis 3,3 ms. Jaksonaika on 20 ms. Jännitteen ja virran vaihe-eroksi saadaan

$$\varphi = \frac{3,3 \text{ ms}}{20 \text{ ms}} \cdot 2\pi = 1,04 \text{ rad} = 60^\circ$$

b) Koska jännite on edellä virtaa, on virtapiirissä olevissa laitteissa induktanssia. Tällöin virran muutokset hidastuvat joten jännite on virtaa jäljessä.

c) Vaihtovirran teho riippuu jännitteestä, sähkövirrasta ja vaihe-erosta: $P = UI \cos \varphi$, jossa U on jännitteen tehollinen arvo ja I jännitteen huippuarvo. Luetaan huippuarvot kuvaajasta $\hat{u} = 32 \text{ V}$, $\hat{i} = 115 \text{ mA}$. Kuvaajasta voidaan lukea vain huippuarvot, joten teho on ilmaistava huippuarvojen avulla:

$$P = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \cos \varphi = \frac{\hat{u}\hat{i}}{2} \cos \varphi = \frac{32 \text{ V} \cdot 0,115 \text{ A}}{2} \cdot \cos 60^\circ = 0,92 \text{ W}$$

Luku 4

25. Generaattorin jännite on 220 V ja teho 2,2 kW. Kulutuslaitteen ja generaattorin välisten johtimien kokonaisvastus on 2,2 Ω. Kuinka paljon tehoa kuluu johtimessa hukkaan? (Yo k 70)

Ratkaisu:

Johtimien virta on

$$I = \frac{P}{U} = \frac{2200 \text{ W}}{220 \text{ V}} = 10 \text{ A}$$

Johtimissa kuluva teho on

$$P_h = I^2 R_j = (10 \text{ A})^2 \cdot 2,2 \Omega = 220 \text{ W}$$

26. a) Selosta sähköenergian siirron periaatetta ja sen toteuttamista käytännössä. b) Teholtaan 1,5 kW sähkömoottori on kytketty 220 V vaihtovirtaverkkoon. Laske moottorin ottaman virran tehollisarvo ja huippuarvo, kun jännitteen ja virran välinen vaihesiirto on 22°. (Yo s 80)

Ratkaisu:

Moottorin teho on

$$P = UI \cos \varphi$$

Tästä ratkaistaan

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi} = \frac{1500 \text{ W}}{220 \text{ V} \cdot \cos 22^\circ} \approx 7,4 \text{ A}$$

Huippuarvo on

$$\hat{I} = I\sqrt{2} \approx 10 \text{ A}$$

27. Muuntajan ensiöpuolelle tulee generaattorista jännite, jonka tehollinen arvo on 8,5 kV. Jännite muunnetaan kuluttajien käyttöön niin, että sen tehollinen arvo on 120 V. Kuluttajien keskimääräinen tehonkulutus on 78 kW. Oletetaan, että kyseessä on ideaalinen muuntaja, jonka tehokerroin on 1, ja toisiopuolen kuormitus on puhtaasti resistiivinen.

- Mikä on muuntajan muuntosuhde?
- Mitkä ovat sähkövirtojen teholliset arvot muuntajan ensiö- ja toisiopuolella?
- Määritä toisiopiirin kuormitus (resistanssi).
- Määritä ensiöpiirin kuormitus (resistanssi).

Ratkaisu:

a) Muuntosuhde on

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{120 \text{ V}}{8500 \text{ V}} \approx 0,014$$

b) Virtojen teholliset arvot ovat

$$I_1 = \frac{P}{U_1} = \frac{78000 \text{ W}}{8500 \text{ V}} \approx 9,2 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{P}{U_2} = \frac{78000 \text{ W}}{120 \text{ V}} \approx 650 \text{ A}$$

c) Toisiopiirin resistanssi on

$$R_2 = \frac{U_2^2}{P} = \frac{(120 \text{ V})^2}{78000 \text{ W}} \approx 0,18 \Omega$$

d) Ensiöpiirin resistanssi on

$$R_1 = \frac{U_1^2}{P} = \frac{(8500 \text{ V})^2}{78000 \text{ W}} \approx 930 \Omega$$

28. Muuntajan ensiökäämissä on 100 kierrettä. Siihen johdetaan 400 V tehollinen jännite, jolloin siirrettävä teho on 40 kW. Toisiokäämissä on 1000 kierrettä. Kuinka suuri on muuntajasta saatavan sähkövirran tehollinen arvo?

Ratkaisu:

Ensiövirta on

$$I_1 = \frac{P}{U_1} = \frac{40000 \text{ W}}{400 \text{ V}} = 100 \text{ A}$$

Toisiovirta on

$$I_2 = \frac{N_1}{N_2} I_1 = \frac{100}{1000} 100 \text{ A} = 10 \text{ A}$$

29. Kulutusyksikölle siirretään 10 kW teho 150 km etäisyydellä olevasta vaihtovirtaa tuottavasta voimalasta. Kulutusyksikköön tulevan napajännitteen tehollinen arvo on 2,0 kV. Kuinka suuri siirtojohtimien resistanssi voi korkeintaan olla metriä kohti, jos energiansiirron hyötysuhteen halutaan olevan vähintään 75 %?

Ratkaisu:

Määritellään

P = tuotettu kokonaisteho = 10 kW

P_j = johtimissa kuluva teho $\leq 2,5$ kW

P_p = kulutusyksikköön syötetty teho $\geq 7,5$ kW

R_j = johtimien kokonaisresistanssi

R_p = kulutusyksikön resistanssi

U_p = kulutusyksikön jännite = 2,0 kV

l = johtimien pituus

I = sähkövirta

Oletetaan, että virta kulkee kulutusyksikköön ja takaisin samanlaisen johdon läpi. Sen kokonaispituus on silloin 300 km. Lasketaan resistanssi rajatapauksessa. Kokonaisteho on

$$P = P_j + P_p = I^2 R_j + I^2 R_p$$

Virta on

$$I = \frac{P_p}{U_p} = \frac{7500 \text{ W}}{2000 \text{ V}} = 3,75 \text{ A}$$

Johtimien häviöteho on

$$P_p = I^2 R_p$$

Tästä lasketaan johtimien resistanssi:

$$R_p = \frac{P_p}{I_p^2} = \frac{2500 \text{ W}}{(3,75 \text{ A})^2} = 178 \Omega$$

Resistanssi metriä kohti on

$$\frac{R_j}{l} = \frac{178 \Omega}{300000 \text{ m}} \approx 590 \mu\Omega / \text{m}$$

Luku 5

30. Vaimentamattomassa värähtelypiirissä kondensaattorin kapasitanssi on $2,6 \mu\text{F}$ ja käämin induktanssi $0,12 \text{ H}$. Kondensaattori varataan $12,4 \text{ V}$ jännitteeseen, minkä jälkeen yhteys jännitelähteeseen katkaistaan. Laske käämissä kulkevan virran huippuarvo. (Yo k 80)

Ratkaisu:

Piirin värähtelykulmataajuus on

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Jännite ajan funktiona on

$$U = U_0 \cos \omega t$$

Virra on

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU}{dt} = -\omega C U_0 \sin \omega t = -I_0 \sin \omega t$$

Virran huippuarvo on

$$I_0 = \omega C U_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} C U_0 = \sqrt{\frac{C}{L}} U_0 = \sqrt{\frac{2,6 \mu\text{F}}{0,12 \text{ H}}} 12,4 \text{ V} \approx 58 \text{ mA}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU}{dt} = -\omega C U_0 \sin \omega t = -I_0 \sin \omega t$$

31. a) Minkä taajuuksista lähetystä radioasema lähettää, kun kyseisten radioaaltojen aallonpituus on $3,25 \text{ m}$? b) Miten dipoliantenni tulee säätää, jotta sillä voitaisiin vastaanottaa kyseistä lähetystä?

Ratkaisu:

a) Taajuus on

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3,00 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3,25 \text{ m}} \approx 92,3 \text{ MHz}$$

b) Suomessa ULA-lähetykset on yleensä polarisoitu siten, että sähköinen kenttävektori on vaakasuora. Antenni pitää sen takia asettaa vaakasuoraan sekä kohtisuoraan lähetysuuntaa vastaan.

Käytännössä lähetys kuuluu kyllä muullakin tavalla suunnatulla antennilla, koska aallot aina heijastuvat ympäristöstä, rakennuksista yms. niin, että niissä esiintyy muitakin kenttävektorin suuntia.

32. Värähtelypiirissä on kondensaattori, jonka kapasitanssi on $7,2 \mu\text{F}$, sekä käämi, jonka induktanssi on 350 mH ja resistanssi 22Ω . Määritä värähtelypiirin a) ominaistajuus b) impedanssi ominaistajuudella.

Ratkaisu:

a) Ominaistaajuus on

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 100 \text{ Hz}$$

b) Ominaistaajuudella reaktanssi on nolla, joten impedanssi on

$$Z = R = 22 \Omega$$